

第六回講義 (2011/May/27)

§3 コリンウッド・テーゼの「推論」の観点からの証明

1、古典的プラグマティズムによるテーゼaの証明

2、数学的ないし論理的な言明についてのテーゼaの証明

A 証明論的意味論の紹介

(A) 論理法則の証明論的正当化

(B) 証明論的意味論の説明

B 証明論的意味論によるテーゼa1の証明

3、経験的な言明についてのテーゼ a の証明

A 検証主義意味論の説明

(A) 古い検証主義 (論理実証主義の検証主義) についての説明

(B) 新しい検証主義 (現在この途中)

B 検証主義意味論によるテーゼ a 3 の証明

<まとめと補足>

1、数学的ないし論理的言明の理解についてのまとめ

Dummett は、数学的言明を理解するときには、次の①②③のどれかが成り立つと考える。

- ①証明を知っているとき、
- ②証明を構成する実効的な方法を知っているとき(実効的に決定可能であるとき)
- ③証明が与えられたら、それを認識する能力があるとき、

②や③をもっている、そのときに数学的言明が与えられているとはかぎらないので、<①②③のどれかが成り立つこと>は、<数学的言明を理解すること>の必要条件であるが、充分条件ではない。

■①について

Dummett も Prawitz も言明の正規的な証明をもつこと、ないし証明を正規的な証明に還元できるとことであると考えていた。(両者の間には、正規的な証明の定義に関して、若干の違いがあるのだが、それはテクニカルな違いである。)

■②について

これについては、Dummett と Prawitz の間には、大きな違いがある。

「証明を構成する方法」ということで、Dummett がよくあげる例は文p「自然数nが素数である」である。これが真であるか偽であるかを調べるアルゴリズムを我々は持っているので、この真理値をまだ知らなくても、我々はpを理解している。またpの真理値を知らなくても、「 $p \vee \sim p$ 」が真であることを証明するアルゴリズムを持っているので、これは有意味である、と Dummett は考える。

これに対して、Prawitz が「証明を発見する方法」という表現で考えていることは、少し異なる。(「証明を構成

する」と「証明を発見する」という表現の違いが両者の間にはある。)

先週のべたように、Prawitz は、「ワイルがフェルマの定理を証明する前に、我々はすでにフェルマの定理を証明する実効的な方法を発見していたのだろうか」と自問して、次のように答える。「これは、フェルマの最終定理が、我々が以前から正しいことを知っていた形式的体系の内部で定式化されたのかどうか、にかかっている。」(ibid. p.285)という。つまり、Prawitz は、<定理の証明がその内部で定式される形式的体系を我々がすでに知っている>ならば、<我々はワイルがフェルマの定理を証明する前から、我々はフェルマの定理の証明のための実効的な方法を発見していたのだ>と考えるのである。

プラウッツがこのように考えるのは、

①「数学的文が真であるとは、その証明があるときそのときに限る」(p.287)

②数学的文の真理は、無時間的なものである。

ゆえに

③「数学的文の証明が発見されたのならば、文が証明を持つことはすでに決まっていたのである」(p.288)

Prawitz は、実在論者ではなく、<真理＝証明されること>と考えるが、他方で<数学的真理は無時間的(客観的)なものである>と考えるので、証明もまた無時間的(客観的)なものであると考えことになる。すると、ここでの「我々は・・・発見していた」の「われわれ」は具体的な個人ではありえないことになる。それが何なのか彼は言明しない。

Prawitz は、Dummett はこのような立場を認めないことを認めているが、しかし他方で、Dummett が真理の客観性を認めるとしたら、このようなこのような立場を認めざるを得ないのではないかと考えている(Cf. 286)。Dummett にとっては、「証明の実効的な構成方法を知っている」のは、あくまでも個人であろうと思われる。

Prawitz のように考えるならば、次のような考えに行き着くだろう。

<我々がその形式的な体系を知らないならば、もし証明が与えられたとしても、<直ちに>それを認識することはできないだろう。しかし、その認識は原理的に不可能なのではない。もしその形式的体系の説明が与えられたならば、それを認識する能力があればよいだろう。では、<もしその形式的体系の説明が与えられたならば、それを認識する能力がある>とは、どういうことだろうか。それはまたしても、<その形式的体系の説明に用いられる基礎的な理論体系をあらかじめ知っていること>であろう。これはさらに反復するかもしれない。数学の場合には、自然数論や集合論の体系にたどり着くのもかもしれない。もし数学の基礎づけについての論理主義をとるならば、数学的言明は、論理学の体系の中で説明されるだろう。さらにもし直観主義論理をとるならば、証明論的正当化によって説明されるだろう。

もしこのようにいえるならば、すべての数学的言明は、<直ちに>ではないが、<原理的にはすべての思考能力を持つ知性によって>、基礎的な数学や論理学によって証明されるだろう。>

さて、このように考えるならば、①と②だけで十分であり、③の条件は必要なくなるだろう。なぜなら、証明が与えられることがありうるような証明ならば、その証明の方法をすでに発見していることになるからである。(私は、Prawitz が、証明や検証を認識する「capacity」や「ability」について言及している箇所をまだ見たことがない。)

(ただし、Prawitz のように考えるときに、残る問題は次である。ゲーデルの不完全性定理が証明したことは、真であるが証明できない式が存在するということであった。しかも、それ証明を与えるためには、その式ないしその他の式を公理に加える必要があるので、その証明のためには、我々が知らない形式的体系を

作らなければならない。新しい形式的体系の作り方の実効的方法は、おそらくあらかじめ明示できないが、我々にはその能力があると思われる。その意味では、③が条件として必要になる。)

③<もし証明が与えられたら、それを認識する能力がある>について

学生からのコメントに、「②の「実効的な方法」を知っているが成り立つかどうか、を確認するには、実際に証明を構成してみなければならぬのではないか」という批判があった。

通常は、実効的な方法が、有限回の手続きであるのならば、それを実際にやってみなくともよい、と考えるだろう。しかし、上記の批判者は、その実際に証明する必要があるという。この批判は、「 $57+65=122$ が真であるかどうかの計算方法を知っている」といえるためには、実際にやってみなければわからない、ということと同じことである。それは、「クロス計算」の可能性を恐れているのである。

このクロス計算の問題(ウイトゲンシュタイン『哲学探究』)には、次のような問題が混在している。

- (1)我々は、原理的に、計算規則を完全に明示的に示すことができない。(規約主義のパラドクス)
- (2)(1)ゆえに、我々がプラスの計算規則だと思っているものが、ほかの人が思っているものと違うことがわかる可能性がある。
- (3)計算規則を何度修正しても、(1)ゆえに常に(2)の可能性が残る。
- (4)<そのような食い違いが明らかになれば、そのつど規則の理解を修正してゆけばよく、食い違いが明らかになるまではデフォルトに規則を正しく理解しているという資格 entitlement をもつ>という方法(Brandom, default and challenging system of entitlement)、を採用するしかないように思われる。(では、この方法を採用すること自体は、どのようにして正当化されるのか、これもまたデフォルトに信頼し、問題が生じれば検討するということがよいのだろうか。)
- (5)計算するためには、明示的に示されていない計算規則を学習し、それに従う能力を持つことが必要である。

こうして、②の実効的方法を持つことが成立するためには、③の能力が必要になる。

2:残っていた問題に答える

証明論的味論では、数学的言明を理解することは、<次の①②③のどれかが成り立つこと>を必要条件とする。

- ①証明を知っているとき、
- ②証明を構成する実効的な方法を知っているとき(実効的に決定可能であるとき)
- ③証明が与えられたら、それを認識する能力があるとき、

これらは、次のように言い換えられる。

- ①言明を結論とする妥当な推論を知っている。
- ②言明を結論とする妥当な推論を構成する実効的な方法を知っている。
- ③言明を結論とする妥当な推論が与えられたら、それを認識する能力がある。

テーゼa1に一致するのは、①だけであり、②と③は一致しない。

証明論的意味論の中心的なアイデアは、<数学および論理学の命題の意味を理解することは、その証明を理解することである>という主張にあるとおもわれる。偽なる命題の場合、<その意味を理解するとは、それが偽であることの証明を理解することである>といえるのではないだろうか。

これだけならば、テーゼa1と一致した。

問題は、真であるとも偽であるとも証明されていないが、その意味を理解していると思われる文の存在である。このような文の理解について、私は次のように提案したい。

<ある文を理解するとは、その文を結論とする直前の推論を理解し、その推論の結論として理解することである。>

たとえば、 $p \rightarrow (w \rightarrow r)$ ならば、次のような推論の結論として理解できる

$$\begin{array}{c} p \\ : \\ \hline w \rightarrow r \\ p \rightarrow (w \rightarrow r) \end{array} \qquad \begin{array}{c} s, \quad s \rightarrow (p \rightarrow (w \rightarrow r)) \\ \hline p \rightarrow (w \rightarrow r) \end{array}$$

という推論の結論として理解することである。

ゴールドバッハの予想「4以上のすべての偶数は、二つの素数の和である」は、たとえば次のような推論の結論として理解できる。

$$\begin{array}{c} \text{「2を除くすべての偶数は、二つの素数の和である」} \\ \hline \text{「4以上のすべての偶数は、二つの素数の和である」} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{「5より大きな任意の自然数は、3つの素数の和である」} \\ \hline \text{「4以上のすべての偶数は、二つの素数の和である」} \end{array}$$

以上のようにいえるならば、テーゼa1が成り立つ。

テーゼ a 1 「すべての数学的ないし論理的言明は、何らかの推論の結論としてのみ意味を持ちうる」

ここでは、「何らかの推論」とは、「その言明を結論とする最後の推論ステップ」のことである。そこで使用されている前提を理解していないときには、言明の理解は完全ではないし、十分ではないかもしれない。その理解をより豊かなものにするには、そこで使用されている前提について、さらにそれを結論とする最後の推論ステップを理解すればよい。これを繰り返してゆけば、無限に続くか、循環することになるだろう。（「言明の完全な理解」というものを定義することはできないし、おそらくそのようなものは存在しない。）私は、ここでの推論を証明論的意味論のように正規的な証明に限らない。一つの文についての異なる証明は、その文についての異なる理解を与えると考ええる。（その理由は、テーゼbに基づく。ある文を証明する推論が異なるのは、その推論が答えようとしている問が異なるからであり、問が異なれば、同じ文が答えであっても、意味が異なるからである。これについては、後述する。）

このようにいえるならば、<ある文を理解するとは、それを前提とするときに何が帰結するかを理解している

ことだ>ということも同様にいえそうだ。ただし、 $p \vdash q$ が帰結するとき、 $\sim q \vdash \sim p$ が帰結するので、もしpを前提としてqが言えるときには、 $\sim q$ を前提として $\sim p$ が導出されるので、つぎのようにいえばこのようなケースを含めることができる。

<ある文を理解するとは、その文ないしその否定を結論とする直前の推論を理解し、その推論の結論として理解することである。>

3、古い検証主義（論理実証主義の検証主義）についての補足

文の意味を知るとは、検証条件あるいは反証条件を知ることである

■古い検証主義の問題点1

古い検証主義では、「文の意味とは、その文が観察文によって検証される仕方、あるいは観察文によって反証される仕方である」。それゆえに、検証不可能で反証不可能な文は、意味を持たないことになる。例えば：反事実的条件文が無意味になる。

「もし150度以上に熱したならば、このバターはとける」

「もしトースターを4分にセットしたら、このパンは真っ黒になる」

反事実的条件文とは、 $p \rightarrow q$ という条件文であり、しかも前件pが偽であるものをいう。前件が偽であるので、この条件文は常に真になる。 $p \rightarrow \sim q$ と $p \rightarrow q$ はともに常に真になる。したがって、この二つの真理条件は同じになる。これは、当初の真理条件意味論にとっても難問であったが、可能世界をモデルにする可能世界意味論によって、 $p \rightarrow q$ は、pが真となるすべての世界において、qが成り立っているという真理条件をもつこととして定義されるようになった。

■古い検証主義の問題点2 自己論駁性

検証主義意味論のテーゼ「文の意味とは、その文が観察文によって検証される仕方、あるいは観察文によって反証される仕方である」を、自己自身に適用するとき、このテーゼは観察文によって検証も反証もされないの、無意味になる。

—————補足終わり

(B) 新しい検証主義

Prawitzによると、「文をどのようにして検証ないし反証するのかを知ること[古い検証主義]と、文にとって検証を構成するものが何であるのかを知ること[新しい検証主義]を区別すること」(Dag Prawitz, 'Comments on the papers' in *Theoria* 64, 1998, p. 294)が重要である。

ちなみに、真理条件意味論によると「文の意味を知るとは、文が真であるために、世界がどうであらねばならないかを知ることである。同時に、この知識が、世界の状態を認識するから独立していることを主張する。」(295) これに対して、検証主義意味論では、「主張が正しいのは、話し手が主張された文の検証を知っている場合だけである。」(298)

<新しい検証主義の Prawitz の定義と Dummett の定義>

検証主義意味論では、経験的言明を理解することは、<次の①②③のどれかが成り立つこと>を必要条件とする。

- ①検証ないし反証を知っている
- ②検証ないし反証を構成する実効的な方法(検証条件ないし反証条件)を知っている
(言い換えると、文の真理値を実効的に決定可能であるとき)
- ③検証ないし反証が与えられたら、それを認識する能力がある

③について、

プラウィッツは、「文にとって検証を構成するものが何であるかを知っている」あるいは「何が文の検証としてみなされるかを知っている」(Dag Prawitz, 'Comments on the papers' in *Theoria* 64, 1998, p. 294)という。

ダメットは、「文の理解は、ある能力に他ならないのであり、その能力とは、適切な位置に自ら立つためのいかなる実効的方法がなかったとしても、その位置に立つ場合には、その文が真なのか偽なのかを認識する能力である」(ダメット『思想と実在』金子洋之訳、春秋社、p. 98)という。

「ある言明を真あるいは偽として認識する能力をもつために、「適切な位置にたつとき」という表現は、関連する観察が教えられ、関連する推論を提示されたときに、それらがまさに関連するものであると認識できるということを意味する。」(p. 99)

<反事実的条件文について>

「古い検証主義をとるならば」決定可能な文だけが有意味であるという帰結になるだろう。しかし批判が繰り返し指摘してきたように、それはこれを受け入れがたい立場にする。あきらかに、我々は検証も反駁もできない文を理解するだろう。」(Prawitz, 'Comments on the Papers', in *Theoria*, 64, 1998, p. 294)

「私たちは確かに、文をどのようにして検証するのかを知ることなしに、その文を理解するだろう。しかし、ひとは次のように尋ねることができる。何が文の検証としてカウントされるのかを知らずに、文を理解することがあるだろうか」(Prawitz, 'Comments on the Papers', in *Theoria*, 64, 1998, p. 295)

何が文の検証としてカウントされるかを知らずに、文を理解することがあると考える者は、「文の意味を知ることは、その文が真であるためには、世界がどうなっているかを知ることである」(真理条件意味論)と主張し、同時に、「この知識は、世界のそのような状態を認識する能力とは独立している」(実在論)と主張するだろう。(Cf. p. 295)

Prawitz は、反事実的条件法もまた有意味な文であると考えようとしている。それを真理条件意味論の一種である可能世界意味論では説明しない。なぜなら、可能世界は、我々には認識不可能だからである。

では、彼はどうするのだろうか。彼は、文の意味を使用だとする立場から、これに答えようとする。しかし、具体的な提案は、していない。しかし、反事実的条件文の検証としてカウントされるものが何であるかを述べることは彼にはできないが、しかしそのようなものは存在しえない、ということは帰結しない。

<全称文について>

古い検証主義は、全称文の検証条件を示せなかった。

Prawitz は、全称文をある証拠に基づいて、帰納推理として導出できると主張する。しかし、その場合の問題は、帰納の結論は、蓋然的であり、したがって、一つの反証例が見つかったとしても、それによって、帰納の結論は反証されるとは限らないことになる。つまり「ほとんどのカラスは、黒い」が帰納の結論ならば、白いカラスが一羽見つかっても反証されない。Prawitz は、検証主義では、全称文を厳密な意味で使用できなくなると危惧する。

我々は、全称文の理解については、これを反証条件を知っていることが、その意味を知っていることだと考えることができるだろう。(Dummett もそう考えているのかもしれない)

<自己論駁的ではない>

古い検証主義意味論に対する批判には、「検証原理」そのものが検証不可能であるという批判があった。これに対して、新しい検証主義は、「文の意味は、・・・である」という形式の定義を与えない。なぜなら、文の理解は、**practical knowledge, implicit knowlege** であって、命題知として表現できないからである。したがって、新しい検証主義のテーゼを、自己自身に適用しても、自己論駁的ではない。

VD 「文を理解するとは、その検証が与えられたならば、その検証を認識する能力があることである」

VP 「文を理解することは、何がその検証を構成するかを知ることである」

これらを自己自身に適用すると次のようになる。

「この文 VD を理解することは、この文 VD の検証が与えられたならば、その検証を認識する能力があることである」

「文 VP を理解することは、何がその検証を構成するかを知ることである」

ここには、かりに循環があるとしても、矛盾はないように思われる。能力は、反事実的条件文で表現される。古い検証主義では、反事実的条件文は無意味になったが、新しい検証主義では、直ちには無意味ならぬので、これらの原理は、自己論駁的ではない。

B 検証主義意味論からテーゼ a を証明する

古い検証主義では、文の意味は明確である。検証は、観察文から当の文を論理的に演繹すること、つまり検証主義によれば、「経験的な文を理解するとは、観察文を前提とする推論の結論として理解することである。」この主張は、テーゼ a を観察言明に限定したつぎのものと、同じことを主張していると言えるだろう。

テーゼ a2 「すべての観察言明は、何らかの推論の結論としてのみ意味を持ちうる」

しかし、古い検証主義には、説明できる文がわずかであるという欠点があった。

では、新しい検証主義の②と③はテーゼ a2 とは一致しない。

証明や検証や反証は推論である。推論が完全な仕方与えられないときにも、我々は、文の意味を理解している。<その文が主張できるとしたら、何が言えればよいのか>、<その文の主張の前提>がわかって

いるとき、我々はその文の真偽がわかっていなくても、その文の意味を理解している。

以上のようにいえるならば、テーゼ a2 が成り立つ。

テーゼ a2 「すべての経験的言明は、何らかの推論の結論としてのみ意味を持ちうる」

ここでは、「何らかの推論」として「その言明を結論とする最後の推論ステップ」を考えている。そこで使用されている前提を理解していないときには、言明の理解としては完全ではないだろう。その理解をより豊かなものにするには、そこで使用されている前提について、さらにそれを結論とする最後の推論ステップを理解する必要がある。これを繰り返してゆけば、無限に続くか、循環することになるだろう。（「言明の完全な理解」というものを定義することはできないし、おそらくそのようなものは存在しない。）

私は、ここででも一つの言明についての異なる証明は、その文についての異なる理解を与えると考える。（その理由は、ある文を証明する推論が異なるのは、その推論が答えようとしている問が異なるからであり、問が異なれば、同じ言明が答えであっても、意味が異なるからである。これについては、後述する。）

文を理解するために必須なのは、文の要素の意味を理解することではなくて、文の全体が部分からどのように合成されるかを理解することである。たとえば、

「pかつq」

をわれわれは理解する。pやqの意味は不明であるが、それでも文を（部分的に）理解でき、ある文脈（たとえば、論理学の授業）ではそれで十分である。それに対して、

「これはリンゴだ」 vfsr 「これは黄色だ」

が何を意味しているのかかわらない。なぜなら文の要素となる二つの文の意味は分かっているが、それらを結合しているらしい「vfsr」の意味が分からないからである。

（たとえば、われわれは論理結合子を変項にした量化文を理解できようと思われるが、それは上記の反証にはならない。たとえば次を考えてみよう（@を論理結合子の変項とし、@nを論理結合子の定項とする）。

$\forall @ (p@q)$

このときには、@は文の要素であり、文全体を直前の部分から合成する仕方を表現するものではない。この場合にはそれは連言である。

$\forall @ (p@q) \equiv (p@_1q) \& (p@_2q) \& (p@_3q) \& \dots$

として理解しているからである。）

このように考えるとき、全称文や反事実的条件文は次のような推論の結論として理解される。

「すべてのカラスとすべてのクジラは黒い」

「すべてのカラスは黒い」

地震ですでに福島第一原発の配管は破壊されていた。

もし津波がなかったとしても、福島第一原発はその前の地震で破壊されていただろう。

ミニレポート課題

「全称文と反事実的条件文を結論とする推論（上記のような例）一つずつ作ってください。」

■残された課題

観察報告文「これは赤い」は、別の文を前提とせず、観察から直ちに得られるように思われる。これはテーゼ a2 に対する反例になるのだろうか。（来週のお楽しみ）

