UNIVERSITÉ PARIS 1 – PANTHÉON–SORBONNE –
U.F.R. DE PHILOSOPHIE

<u>MÉMOIRE DE MASTER 2</u>

pour obtenir le grade de

MASTER 2 DE L'UNIVERSITÉ PARIS 1

Discipline : Logique

présentée par

Kazumasa OBA

le 21 mai 2007

Le modèle hintikkanien de la logique interrogative

Directeurs de recherche :

Gabriel SANDU et Jean MOSCONI

L'année de soutenance : 2007

Introduction

La logique des questions et des réponses, largement issue des travaux de Jaakko Hintikka et Andrzej Wiśniewski, a récemment changé sa perspective, de façon significative. L'approche traditionnelle pour la logique des questions et des réponses s'est concentrée sur la structure des questions et sur leur relation avec les réponses. En revanche, bon nombre de chercheurs, qui sont en augmentation se concentre maintenant sur l'approche déductive (par inférence) pour la logique des questions et des réponses. Surtout sur l'approche déductive des conditions de validité pour divers types des inférences interrogatives. Les bons exemples pour cette approche sont le modèle interrogatif de Hintikka et la logique interrogative par inférence de Wiśniewski.

Maintenant, nous abordons rapidement l'histoire de la logique des questions et des réponses en mentionnant d'abord des philosophes et des logiciens qui ont écrit sur ce sujet.

En 1965, Aqvist a fait paraître un livre intitulé *New Approach to the logical theory of interrogatives(Part I)*. En 1976 Nuel D. Belnap, jr et Thomas Steel écrivent un livre sur la logique des questions. *The logic of questions and answers*. Belnap est un logicien et aussi un philosophe américain. Il a fait beaucoup de contributions importantes à la philosophie de la logique, la logique temporelle, et la théorie structurale des preuves. La logique systématique des questions est traitée dans les deux livres.

Jaakko Hintikka aborde le sujet comme une recherche sur l'enquête scientifique. Il a formulé l'idée qu'on peut penser une enquête scientifique comme une chaîne de questions et de réponses en 1981. Hintikka est considéré comme le fondateur de la logique épistémique formelle. Il fonde son modèle de la logique des questions sur la logique épistémique.

Le modèle hintikkanien forme une des premières études sur les conditions de vérité des dérivations interrogatives. Et il est appliqué pour résoudre des problèmes dans le cadre de la philosophie des sciences et pour traiter l'étude de cas dans le cadre de l'histoire des sciences. Beaucoup d'idées fondamentales qui sont derrière ce modèle sont généralisés et systématisés par Wiśniewski. La théorie qui est un résultat de Hintikka fournit une explication sémantique de plusieurs concepts interrogatifs et la dérivation des questions auxiliaires qui est utile pour répondre à la question initiale.

En 2004, Andrzej Wiśniewski a écrit un article, « Socratic proofs ». Il dit, dans son article, que notre but est d'exprimer de façon précise la vieille idée de résoudre des problèmes par l'interrogation pure. L'interrogation pure est une interrogation que nous n'avons pas besoin de résoudre à l'aide d'une question auxiliaire. En 2006 Andrzej Wiśniewski et Vasilyi Shangin ont écrit la suite de l'article de 2004.

À première vue, la théorie de Wiśniewski est vraiment attirante. Les explications sont intéressantes et simples. Et il nous semble qu'elles capturent bien les idées fondamentales sur les inférences interrogatives. Mais, si nous considérons son applicabilité pour résoudre les problèmes dans un cas actuel, nous trouvons un défaut dans la théorie. Il se peut qu'il nous semble que les explications sont très rigoureuses pour permettre la dérivation des questions qui sont hors de propos et qui sont très complexes. Mais il se peut qu'il ne nous semble pas que les explications soient très rigoureuses parce que la théorie exclut beaucoup de questions qui sont très utiles, du point de vue intuitif.

Il y a beaucoup de travaux sur la relation des questions et des réponses comme nous l'avons rapidement vu. La caractéristique la plus importante pour le modèle interrogatif de l'enquête est qu'on peut déterminer ses réponses possibles. Et il nous semble que le modèle le plus probant soit naturellement le modèle hintikkanien.

Le modèle hintikkanien de la logique des questions et des réponses utilise une variante de la méthode des tableaux de Beth comme outil fondamental. Pour construire des tableaux, nous allons utiliser une notion issue de la théorie des jeux. Le jeu qui construit des tableaux est une variante du jeu de Hodges et van Benthem. Cette variante est appelée le jeu interrogatif de Hintikka. Le jeu de Hodges et van Benthem est le jeu de la construction d'un modèle par la construction de tableaux. Nous pouvons dire que le jeu de Hodges et van Benthem est le jeu de la construction des tableaux.

En suite nous donnons une explication sémantique pour plusieurs concepts interrogatifs comme la présupposition, le desideratum et la réponse. Nous donnons aussi la dérivation des questions auxiliaires qui est utile pour répondre à une question initiale. La différence entre la question auxiliaire et la question initiale est donnée comme la différence entre la question opérationnelle et la question principale. En même temps nous définissons les règles pour construire le tableau. Comme résultat de ces règles définies, nous allons avoir la logique interrogative épistémique.

Et puis, nous verrons que le but pragmatique que nous posons une question *pourquoi* est tout à fait différent du but que nous posons une autre question. Le but de la personne qui interroge de poser les questions « Que », « Où », « Qui », « Quand » et « Quel » est d'obtenir une conclusion ultime. Par contre, quand la personne qui interroge pose la question *pourquoi*, elle cherche le pont argumentatif entre les suppositions (les hypothèses ou les prémisses) initiales et la conclusion ultime. Quand la personne qui interroge pose une question *pourquoi*, le pont est la « réponse ». Donc nous définissons des conditions pour le pont. Une de ces conditions est la loi de couverture que nous allons définir.

Dans le premier chapitre, nous présenterons la méthode des tableaux de Beth en comparant la méthode de tableaux de Beth et la méthode des séquents de Gentzen. Dans le deuxième chapitre, nous exposons le jeu de Hodges et van Benthem afin de mieux comprendre la version interrogative donnée par Hintikka. Cette version de Hintikka fera l'objet de notre troisième chapitre. Au cours de celle-ci, nous étudierons la règle de l'interrogation qui dit que nous pouvons ajouter la réponse dans LA(LES) PRÉMISSE(S) INITIALE(S) comme une prémisse nouvelle. Ensuite, dans notre quatrième chapitre, nous verrons une explication sémantique pour plusieurs concepts interrogatifs comme la présupposition, le desideratum et la réponse. Et nous verrons aussi les règles complètes pour la logique interrogative. Notre dernier chapitre portera sur les questions de type *pourquoi*. Dans la dernière section, nous présenterons le théorème de la loi de couverture.

1. La méthode des tableaux de Beth

Dans ce chapitre, nous allons voir la méthode des tableaux de Beth en comparant la méthode de tableaux de Beth et la méthode des séquents[1].

La méthode de Beth est développée pour permettre l'exécution des opérations établissant un parallèle avec des opérations de la méthode des séquents. Mais la méthode de Beth peut avoir une compacité plus grande. Le « séquent » est une unité dans les travaux de la méthode des séquents. De même, le « tableau » est une unité dans les travaux de la méthode des tableaux de Beth. Dans le tableau de Beth, la colonne gauche correspond au séquent antécédent du séquent de Gentzen. Et la colonne droite correspond au séquent conséquent du séquent de Gentzen. Mais le tableau n'est pas justement comme un séquent, mais il est comme un ensemble des séquents.

1.1. Les tableaux

---

[1] L'objet de base du calcul est le séquent, qui est un couple de listes finies (éventuellement vides) de formules. Les séquents sont normalement notés :

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_n$$

où les A_i sont les hypothèses et les B_j sont les conclusions du séquent.

Si nous voulons démontrer en utilisant la méthode de Beth que $\Gamma \vdash \Theta$ est prouvable, nous devons commencer le tableau en écrivant toutes les formules de Γ dans la colonne gauche et toutes les formules de Θ dans la colonne droite d'un tableau. La méthode des tableaux est une méthode sémantique pour constater la validité logique de l'inférence. Nous l'utilisons systématiquement par trouver le contre-exemple potentiel qui rend la prémisse de l'inférence vraie et sa conclusion fausse. Donc, nous écrivons les formules que nous voulons rendre vraies au côté gauche, et les formules que nous voulons rendre fausses au côté droit. En suite, nous décomposons ces formules avec des règles. Pour montrer l'opération de la décomposition, la manière la plus facile est de prendre des exemples. Donc considérons $\vdash (A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow B)$. Nous commençons un tableau en écrivant ce qui suit :

$$\begin{array}{c|l} & (A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow B) \end{array}$$

La première opération du tableau est la décomposition de $(A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow B)$. Nous commençons l'opération avec « $\rightarrow$ ». Si nous nous souvenons de la règle de la méthode des séquents de Gentzen, nous pouvons l'appliquer à l'envers pour le tableau. Nous écrivons $A \wedge B$ dans la colonne gauche, et $C \rightarrow B$ dans la colonne droite du tableau :

$$\begin{array}{r|l} & (A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow B) \\ A \wedge B & C \rightarrow B \end{array}$$

La nouvelle formule dans la colonne gauche est avec $\wedge$, si nous nous souvenons de la règle de la méthode des séquents de Gentzen, nous pouvons à nouveau l'appliquer à l'envers. Donc nous écrivons *A* et *B* dans la colonne gauche du tableau :

$$
\begin{array}{r|l}
 & (A \wedge B) \to (C \to B) \\
A \wedge B & C \to B \\
A & \\
B &
\end{array}
$$

La formule $C \to B$ reste encore sans être traitée. $C \to B$ est dans la colonne droite. Considérons la règle de la méthode des séquents qui est relative à cette situation. Nous écrivons donc *C* dans la colonne gauche et *B* dans la colonne droite du tableau :

$$
\begin{array}{r|l}
 & (A \wedge B) \to (C \to B) \\
A \wedge B & C \to B \\
A & \\
B & \\
C & B
\end{array}
$$

Dans le tableau ci-dessus, nous sommes allés jusqu'au bout de l'opération. Et nous sommes arrivés au point signifiant dans la construction du tableau. Nous devons remarquer que la formule B a une occurrence dans les deux colonnes, gauche et droite, du tableau. Quand cela se passe pour chaque formule, nous disons que le tableau est « fermé ».

Maintenant nous devons faire attention à ce que le tableau construit soit une sorte des situations les plus simples dans la construction du tableau. Il y a aussi le tableau se divise en deux tableaux ayant une partie supérieure commune. Il s'agit toujours de l'opération inverse de celle de la règle de Gentzen.

Par exemple, si une formule $A \vee B$ a une occurrence dans la colonne gauche du tableau, nous devons d'abord copier complètement le tableau. Cette opération nous donne deux tableaux identiques. Et puis, nous devons écrire A dans la colonne gauche d'un des deux tableaux. Maintenant, pratiquement il ne faut pas écrire le deuxième tableau avec la manière ci-dessus. Donc nous devons indiquer l'endroit de la division par une ligne horizontale. La ligne vient de l'endroit de la division de la ligne centrale du tableau original. Et, la ligne centrale du nouveau tableau, qui est verticale, s'étend jusqu'à la fin de la ligne horizontale. Les deux tableaux sous la ligne horizontale partagent tout ce qui se situe au-dessus de la ligne horizontale.

Maintenant, considérons un tableau pour $\vdash (((A \to B) \to A) \to A)$; ce tableau va avoir deux lignes dans le début de la construction ;

	$(((A \to B) \to A) \to A)$
$(A \to B) \to A$	A

Nous avons maintenant « $\to$ » dans la colonne gauche du tableau. Comme nous avons dit, nous divisons le tableau. Donc l'antécédent de la formule, « $(A \to B) \to A$ », dans la colonne gauche, va être dans la colonne droite d'un des tableaux formés par la division. Le conséquent de la formule va être dans la colonne gauche d'un autre tableau.

$$
\begin{array}{r|l}
 & (((A \to B) \to A) \to A) \\
(A \to B) \to A & A \\
\hline
\begin{array}{|lr} A \to B & \qquad A \end{array} &
\end{array}
$$

Nous remarquons immédiatement que le tableau alternatif droit est déjà fermé. Maintenant nous continuons avec le tableau gauche :

$$
\begin{array}{r|l}
 & (((A \to B) \to A) \to A) \\
(A \to B) \to A & A \\
\hline
\begin{array}{r|lr} & A \to B & \qquad A \\ A & B & \end{array} &
\end{array}
$$

Donc maintenant le tableau gauche est aussi fermé (nous nous souvenons que les deux tableaux sous la ligne horizontale partagent toutes les choses qui se situent au-dessus de la ligne horizontale).

Quand nous écrivons la division des tableaux comme nous l'avons fait, la structure des tableaux deviennent la forme comme l'arbre. Cette structure ressemble à la structure de la forme comme l'arbre dans la méthode des séquents. Donc maintenant il est clair que, quand nous avons un tableau qui se divise, la question « si un énoncé est un théorème ?» pour le séquent[2], correspond à « si tout tableau alternatif est fermé ?». Nous pouvons dire que le système des tableaux que nous avons traités est fermé, si et seulement si, chaque tableau alternatif est fermé.

Une autre règle qui nous intéresse maintenant est celle pour $\neg$. C'est

[2] Le test pour lequel nous avons développé la méthode des tableaux de Beth.

parce que les règles pour $\neg$ changent de place des formules d'un côté du tableau à l'autre.

1.2. La caractérisation formelle des tableaux

Maintenant nous exposons plus formellement les règles pour la construction des tableaux. Il y a une paire de règles pour chaque connecteur logique, l'un pour la colonne gauche et l'autre pour celle de droite. Les règles sont écrites « **(G.** $\rightarrow$ **)** » pour « $\rightarrow$ dans la colonne gauche », « **(D.** $\rightarrow$ **)** » pour « $\rightarrow$ dans la colonne droite », « **(G.** $\wedge$ **)** », « **(D.** $\wedge$ **)** », et cætera.

Comme nous l'avons noté, nous commençons le tableau en écrivant toutes les formules de Γ dans la colonne gauche et toutes les formules de Θ dans la colonne droite d'un tableau pour $\Gamma \vdash \Theta$. Et puis nous appliquons les règles suivantes :

(G. $\rightarrow$ **) :**	Quand $\alpha \rightarrow \beta$ a une occurrence dans la colonne gauche du tableau, alors nous divisons le tableau, en écrivant α dans la colonne droite d'un des tableaux formés et β dans la colonne gauche de l'autre.
(D. $\rightarrow$ **) :**	Quand $\alpha \rightarrow \beta$ a une occurrence dans la colonne droite du tableau, alors nous écrivons α dans la colonne gauche et β dans la colonne droite du tableau.
(G. $\wedge$ **) :**	Quand $\alpha \wedge \beta$ a une occurrence dans la colonne gauche du tableau, alors nous écrivons α et β dans la colonne gauche du tableau.

(D.$\wedge$) :	Quand $\alpha \wedge \beta$ a une occurrence dans la colonne droite du tableau, alors nous divisons le tableau, en écrivant α dans la colonne droite d'un des tableaux formés et β dans la colonne droite de l'autre.
(G.$\vee$) :	Quand $\alpha \vee \beta$ a une occurrence dans la colonne gauche du tableau, alors nous divisons le tableau, en écrivant α dans la colonne gauche d'un des tableaux formés et β dans la colonne gauche de l'autre.
(D.$\vee$) :	Quand $\alpha \vee \beta$ a une occurrence dans la colonne droite du tableau, alors nous écrivons α et β dans la colonne droite du tableau.
(G.$\neg$) :	Si $\neg\alpha$ a une occurrence dans la colonne gauche du tableau, alors nous écrivons α dans la colonne droite du tableau.
(D.$\neg$) :	Si $\neg\alpha$ a une occurrence dans la colonne droite du tableau, alors nous écrivons α dans la colonne gauche du tableau.
(G.a) :	Si $(\forall x)X(x)$ a une occurrence dans la colonne gauche, pour chaque individu *p* qui est déjà utilisé ou qui va être utilisé, alors nous écrivons $X(p)$ dans la colonne gauche.
(D.a) :	Si $(\forall x)X(x)$ a une occurrence dans la colonne droite, alors nous introduisons un individu nouveau *p* , et en suite écrivons $X(p)$ dans la colonne droite.
(G.e) :	Si $(\exists x)X(x)$ a une occurrence dans la colonne gauche, alors nous introduisons un individu nouveau *p* , et en suite écrivons $X(p)$ dans la colonne gauche.
(D.e) :	Si $(\exists x)X(x)$ a une occurrence dans la colonne droite, pour chaque individu *p* qui est déjà utilisé ou qui va être utilisé, alors nous écrivons $X(p)$ dans la colonne gauche.

Maintenant nous exposons rapidement quelques méta-théorèmes sur la méthode des tableaux de Beth.

(1.1) Il est décidable, pour l'énoncé donné au début du tableau, qu'il y a un ensemble de tableaux qui sont fermés.

(1.2) Si un ensemble de tableaux est fermé, alors le séquent pour lequel l'ensemble commence est un théorème de la logique du premier ordre.

(1.3) Un séquent est un théorème de la logique du premier ordre *ssi* un ensemble fermé de tableaux est constructible pour le séquent.

2. Les tableaux de Beth et les résultat des jeux de Hodges et van Benthem

Le jeu de Hodges et van Benthem est le jeu de la construction d'un modèle. La construction du modèle est faite par deux joueurs, le Constructeur et le Critique, en construisant des tableaux de Beth. Dans ce jeu, le Constructeur et le Critique construisent un tableau pour un séquent.

Les résultats pour les tableaux sémantiques rapportent que la méthode du jeu teste correctement la cohérence logique et la validité. Donc, nous allons pouvoir donner quelques théorèmes dans la section suivante.

2.1. Le jeu de la construction des tableaux

La méthode des tableaux sémantiques est une méthode vraiment répandue pour constater la validité logique de l'inférence. Nous l'utilisons systématiquement par trouver le contre-exemple potentiel qui rend la prémisse de l'inférence vraie et sa conclusion fausse. Pour la construction des tableaux, nous procurons des rôles d'un jeu à deux joueurs, le *Constructeur* et le *Critique*. Tous les deux ont des rôles importants à jouer :

> À chaque étape du jeu, il y a deux boîtes finies de formules qui représentent des tâches actuelles du constructeur. Une boîte est nommée « Oui », et contient les formules qui vont être vraies, et l'autre est nommée « Non », et contient les formules qui vont être fausses.

Les avancements du jeu décomposent les formules complexes. Le jeu s'avance avec le *tour* de chaque joueur. Chaque tour commence comme ainsi :

Le Critique prend une formule pour le traitement actuel.

Après cela, le Constructeur doit répondre d'une façon définie. Il y a plusieurs choix pour convertir les tableaux en jeux. Mais ici nous choisissons un de ces choix. Nous devons remarquer qu'il se peut que chaque mouvement soit considéré *automatique*. Cela veut dire qu'aucun joueur n'a pas de liaison avec chaque mouvement :

Si $\neg A$ se trouve dans une boîte, $\neg A$ change en A dans l'autre boîte.

Si $A \wedge B$ se trouve dans OUI, $A \wedge B$ est remplacée par A et B .

Si $A \vee B$ se trouve dans NON, $A \vee B$ est remplacée par A et B .

Si $(\exists x)\varphi$ se trouve dans OUI, $(\exists x)\varphi$ est remplacée par $\varphi(d)$, d est un objet nouveau qui n'est pas encore utilisé dans OUI ou dans NON

Si $(\forall x)\varphi$ se trouve dans NON, $(\forall x)\varphi$ est remplacée par $\varphi(d)$, d est un objet nouveau qui n'est pas encore utilisé dans OUI ou dans NON.

En suite, nous faisons la liste des règles qui demandent aux joueurs d'effectuer des actions prudentes :

(i) Les disjonctions dans OUI et les conjonctions dans NON sont un choix du Constructeur.

(ii) Pour les formules existentielles $(\exists x)\varphi$ dans NON, le Critique mentionne un objet dans le domaine qui est en train d'être construit, et ajoute $\varphi(d)$ dans la boîte NON.

(iii) Pour les formules universelles $(\forall x)\varphi$ dans OUI, le Critique mentionne un objet dans le domaine qui est en train d'être construit, et ajoute $\varphi(d)$ dans la boîte OUI.

Les deux dernières règles (ii) et (iii) ne sont pas encore précises. Le mouvement du Critique ne remplace pas les formules $(\exists x)\varphi$ et $(\forall x)\varphi$; elles restent encore disponibles pour les autre tours à venir dans la suite du jeu. Dans ce cas-là, il n'y a aucun avantage spécial à choisir prudemment « le choix correct ».

Et il se peut aussi que les deux dernières règles (ii) et (iii) soient considérées *automatique*s.

Ensuite, c'est la *convention gagnante* de ce jeu :

Une étape est la *défaite* si une formule a une occurrence *dans les deux boîtes*.

Le Constructeur *gagne* une série complète du jeu, si aucune défaite n'a d'occurrence dans chaque étape.

La raison de cette condition est claire. La construction du modèle ne peut pas faire apparaître une formule qui est vraie et fausse en même instant ; c'est contradictoire. Finalement, il se peut que nous ayons des *règles procédurales*. Par exemple, nous limitons ce que le Critique prend une formule pour le traitement actuel dans le jeu. Donc c'est une la convention que nous adoptons :

Le Critique *ne reprend pas de formule* s'il en a déjà pris une.

Il se peut que tout tableau sémantique pour le problème de la satisfiabilité propositionnelle et de la satisfiabilité du premier ordre, soit vu comme une série du jeu comme ci-dessus. Nous devons remarquer que le Constructeur et le Critique ne sont pas nécessairement toujours des rôles antagonistes. Notre conjecture que les deux sont antagonistes, empêche parfois de bien comprendre la logique du jeu. Nous pouvons considérer aussi que le Critique est un *directeur* qui assure le travail du Constructeur, et qui crée une construction de bonne qualité.

2.2 La théorie des tableaux et la théorie des jeux

Les résultats pour les tableaux sémantiques rapportent que la méthode du jeu constate correctement la cohérence logique et la validité. Donc nous pouvons donner le théorème suivant :

THÉORÈME 1.

Les deux énoncés suivants sont équivalents dans la logique du premier ordre :

(i) L'ensemble des formules $\{A_1, \dots, A_k, \neg B_1, \dots, \neg B_m\}$ est satisfiable.

(ii) Il y a un tableau *ouvert* avec un nœud au sommet, $A_1, \dots, A_k \mid B_1, \dots, B_m$

Alternativement, nous pouvons exprimer cette équivalence avec les termes de la conséquence valide. Donc les deux énoncés suivants sont aussi équivalents dans la logique du premier ordre :

(a) $\wedge\{A_1, \dots, A_k\}$ implique logiquement $\vee\{B_1, \dots, B_m\}$.

(b) Il y a un tableau *fermé* avec un nœud au sommet, $A_1, \dots, A_k \mid B_1, \dots, B_m$.

Nous ne donnons pas les démonstrations des équivalences ici. Les démonstrations sont tout à fait standards. Mais nous devons remarquer que les tableaux fermés pour la logique du premier ordre sont toujours finis.

Maintenant les résultats ci-dessus, dans les termes des jeux de la construction, expriment une équivalence entre les deux énoncés suivants :

THÉORÈME 2.

(a) L'ensemble des formules $\{A_1, \ldots, A_k, \neg B_1, \ldots, \neg B_m\}$ est satisfiable.

(b) Le Constructeur a une stratégie gagnante dans le jeu de la construction ci-dessus qui commence avec la série de A dans la boîte OUI et la série de B dans la boîte NON.

Donc maintenant nous pouvons voir la situation générale du point de vue de la théorie des jeux. Le théorème implique une propriété importante. Comme le tableau est fermé ou ouvert, le Critique ou le Constructeur doit avoir une stratégie gagnante. Donc il y existe une formulation de ce résultat dans la terminologie de la théorie des jeux:

COROLLAIRE. Les jeux de la construction du modèle sont déterminés.

Cela correspond au théorème :

Les jeux de deux joueurs ayant une information parfaite qui est à somme nulle, et qui a la profondeur finie de la branche, sont déterminés.

La démonstration simple du théorème est obtenue comme suit :

LEMME 1. Le Critique a une stratégie gagnante dans le jeu de la construction, ou le Constructeur a une stratégie gagnante (qui assure qu'il y a un ensemble de branches finies ou infinies, et que la branche n'a aucune étape où le Critique a une stratégie gagnante).

La stratégie gagnante du Constructeur veut dire qu'il y a un ensemble de branches qui sont ouvertes à chaque étape. Donc le Critique ne gagne pas.

La stratégie gagnante du Constructeur concerne les branches ouvertes qui construisent un modèle qui satisfait toutes les conditions initiales. En revanche, la stratégie gagnante du Critique permet de finir toutes les branches de l'arbre du jeu à quelconque étape finie. Donc le sous-arbre de l'arbre complet du jeu n'a aucune branche infinie. Donc le Critique doit avoir une procédure finie pour remporter la victoire. Il se peut que ce soit une contraposition du résultat connu suivant :

LEMME 2. (Lemme de Kônig) Chaque arbre infini, qui fait des branches finies, a une branche infinie.

Cela explique bien la raison pourquoi la stratégie gagnante du Critique concerne des objets finis, c'est-à-dire les tableaux fermés. Et aussi, nous pouvons savoir que la stratégie gagnante du Critique correspond aux démonstrations du séquent positif qui correspondent à la formule initiale :

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \to B_1 \vee \ldots \vee B_m$$

Nous résumons maintenant notre argument. Ce que nous avons vu est la connexion suivante :

THÉORÈME 3. Le jeu de la Construction du modèle expose la correspondance explicite entre

1 la stratégie gagnante du Constructeur

2 les modèles pour les formules données.

Le jeu de la Construction du modèle expose aussi l'autre correspondance explicite entre (a') la stratégie gagnante du Critique

(b') les démonstrations pour le séquent initial.

Nous devons remarquer que la seule notion de stratégie pour les deux joueurs dans un seul jeu unifie les notions de modèle et de démonstration. Ce sont des notions vraiment différentes en logique.

3. Les jeux interrogatifs de Hintikka

Comme nous l'avons vu, les tableaux sémantiques sont une méthode vraiment répandue pour tester la validité logique de l'inférence. Nous pouvons utiliser les tableaux sémantiques pour exprimer la relation interrogative aussi. C'est la séquence des questions et des réponses, que nous devons étudier. Cela veut dire que c'est l'inférence logique des prémisses initiales données et des résultats déjà obtenus. Nous pouvons utiliser une variante de la méthode des tableaux de Beth pour exprimer l'inférence logique. Donc évidemment, le jeu interrogatif de Hintikka est une variante du jeu de Hodges et van Benthem.

Maintenant nous allons voir cette variante du jeu de Hodges et van Benthem. D'abord, pour les tableaux nous donnons un rôle d'un jeu entre deux joueurs, *la personne qui interroge* et *l'oracle*. Tous les deux ont des rôles importants à jouer :

> À chaque étape du jeu, il y a deux colonnes finies des formules qui représentent des tâches actuelles de la personne qui interroge. Une colonne est nommée « LA(LES) PRÉMISSE(S) INITIALE(S) », et contient les formules qui vont être vraies, et l'autre est nommée « LA CONCLUSION ULTIME », et contient les formules qui vont être fausses.

Les avancements du jeu décomposent les formules complexes. Le jeu s'avance avec le *tour* de chaque joueur. Chaque tour commence comme ainsi :

> L'oracle prend une formule pour le traitement actuel.

Après cela, la personne qui interroge doit répondre d'une façon définie. Il y a plusieurs choix pour convertir les tableaux en jeux. Mais ici nous choisissons un de ces choix. Nous devons remarquer qu'il se peut que chaque mouvement soit considéré *automatique*. Cela veut dire qu'aucun joueur n'a de liaison avec chaque mouvement :

Si $\neg A$ se trouve dans une colonne,	$\neg A$ change en A dans l'autre colonne.
Si $A \wedge B$ se trouve dans LA(LES) PRÉMISSE(S) INITIALE(S),	$A \wedge B$ est remplacée par A et B .
Si $A \vee B$ se trouve dans LA CONCLUSION ULTIME,	$A \vee B$ est remplacée par A et B .
Si $(\exists x)\varphi$ se trouve dans LA(LES) PRÉMISSE(S) INITIALE(S),	$(\exists x)\varphi$ est remplacée par $\varphi(d)$, d est un objet nouveau qui n'est pas encore utilisé dans LA(LES) PRÉMISSE(S) INITIALE(S) ou dans LA CONCLUSION ULTIME.
Si $(\forall x)\varphi$ se trouve dans LA CONCLUSION ULTIME,	$(\forall x)\varphi$ est remplacée par $\varphi(d)$, d est un objet nouveau qui n'est pas encore utilisé dans LA(LES) PRÉMISSE(S) INITIALE(S) ou dans LA CONCLUSION ULTIME.

En suite, nous faisons la liste des règles qui demandent aux joueurs d'effectuer des actions prudentes :

(i) Les disjonctions dans LA(LES) PRÉMISSE(S) INITIALE(S) et les conjonctions dans LA CONCLUSION ULTIME sont un choix du de la personne qui interroge.

(ii) Pour les formules existentielles $(\exists x)\varphi$ dans LA CONCLUSION ULTIME, l'oracle mentionne un objet dans le domaine qui est en train d'être construit, et ajoute $\varphi(d)$ dans la boîte LA CONCLUSION ULTIME.

(iii) Pour les formules universelles $(\forall x)\varphi$ dans LA(LES) PRÉMISSE(S) INITIALE(S), l'oracle mentionne un objet dans le domaine qui est en train d'être construit, et ajoute $\varphi(d)$ dans la boîte LA(LES) PRÉMISSE(S) INITIALE(S).

Les deux dernières règles (ii) et (iii) ne sont pas encore précises. Le mouvement de l'oracle ne remplace pas les formules $(\exists x)\varphi$ et $(\forall x)\varphi$; elles restent encore disponibles pour les autres tours dans la suite du jeu. Dans ce cas-là, il n'y a aucun avantage spécial à choisir prudemment « le choix correct ». Et il se peut aussi que les deux dernières règles (ii) et (iii) soient considérées *automatique*s.

Ensuite, c'est la *convention gagnante* de ce jeu :

> Une étape est la *défaite* si une formule a une occurrence *dans les deux colonnes*.
>
> La personne qui interroge *gagne* une série complète du jeu, si aucune défaite n'a d'occurrence dans chaque étape..

La raison de cette condition est claire. La construction du modèle ne peut pas faire une formule qui est vraie et fausse ; c'est contradictoire. Finalement, il se peut que nous ayons des *règles procédurales*. Par exemple, nous limitons ce que l'oracle prend une formule pour le traitement actuel dans le jeu. Donc c'est une la convention que nous adoptons :

L'oracle *ne reprend pas de formule* s'il en a déjà pris une.

Tout tableau sémantique pour le problème de la satisfiabilité propositionnelle et de la satisfiabilité du premier ordre, peut être vu comme une série du jeu ci-dessus. Nous devons remarquer que la personne qui interroge et l'oracle ne sont pas nécessairement toujours des rôles antagonistes. Notre conjecture que les deux sont antagonistes, empêche parfois de bien comprendre la logique du jeu. Nous pouvons considérer aussi que l'oracle est un *directeur* qui assure le travail de la personne qui interroge, et qui crée une construction de bonne qualité.

Le jeu interrogatif de Hintikka est une variante du jeu de Hodges et van Benthem. Dans cette variante, la différence est la règle suivante :

> Dans certaines conditions, la personne qui interroge peut poser la question à l'oracle. Si l'oracle répond, la réponse est ajoutée dans LA(LES) PRÉMISSE(S) INITIALE(S) comme une nouvelle prémisse.

4. La logique des questions et des réponses

Avec le jeu interrogatif de Hintikka que nous avons vu dans le troisième chapitre, nous pouvons définir la logique interrogative. Dans la section 4.1 suivante, nous allons voir la logique interrogative simple avec les conditions suivantes:

(i) Il y a un seul oracle.

(ii) L'ensemble des réponses qui sont données par l'oracle est toujours constant pendant l'enquête.

(iii) Toutes les réponses de l'oracle sont vraies. Et la personne qui interroge le sait.

Ensuite, nous allons développer une caractéristique de la théorie des jeux en sémantique elle nous permet d'avoir des disjonctions et des quantificateurs existentiels qui sont informatiquement indépendants de la lettre initiale de l'énoncé, *K*. Donc nous allons aussi voir, dans ce chapitre, la notion d'indépendance informatique. Avec cette indépendance, il nous est possible d'avoir la réalisation logico-sémantique précise de l'élément de la question, l'élément qui apparait dans le langage naturel. Et aussi, avec cette indépendance, nous pouvons avoir, en définissant les règles spécifiques, une logique interrogative épistémique.

4.1. Les règles fondamentales de la logique interrogative

D’abord, nous allons aborder le cas simple de la logique de l’enquête interrogative qui nous montre quelques caractéristiques importantes pour le raisonnement et l’enquête en général. Ce cas est caractérisé par les caractéristiques suivantes :

(i) Il y a un seul oracle.

(ii) L’ensemble des réponses qui sont données par l’oracle est toujours constant pendant l’enquête.

(iii) Toutes les réponses de l’oracle sont vraies. Et la personne qui interroge le sait.

Avec ces suppositions, il nous semble que la logique du raisonnement interrogative est vraiment simple. Nous pouvons formuler les règles pour un tel raisonnement pour un jeu qui est joué par la personne qui interroge et l’oracle. Nous utilisons une variante de la méthode des tableaux de Beth de logique déductive. Tout mouvement est initié par la personne qui interroge. Ce que l’oracle fait dans ce jeu est justement qu’il répond aux questions qui sont posées par la personne qui interroge. Normalement, nous écrivons certaines prémisses initiales au côté gauche du tableau, et la proposition qui va être interrogativement établie au côté droit. Il y a deux sortes de mouvement, le mouvement logique et le mouvement interrogatif. Le mouvement logique est simplement une variante des règles de la construction du tableau dans la méthode des tableaux normaux. Pour simplifier notre argument, nous supposons que toutes les formules que nous traitons sont comme la forme de négation normale. Les formules de cette forme sont des formules dans lesquelles les formules atomiques ou les identités apparaissent immédiatement après le symbole de la négation. Les concepts fondamentaux de la méthode des tableaux, la colonne, la fermeture, le sous-tableau, etc., sont usuels.

Pour obtenir une notation plus concise, nous allons formuler les règles de la construction des tableaux comme les règles inverses des règles correspondantes à la méthode des séquents de Gentzen. Ceci est possible parce qu'il y a une correspondance entre la méthode des tableaux de Beth et la méthode des séquents de Gentzen. Nous avons vu que la méthode de Beth a été développée pour permettre l'exécution des opérations établissant un parallèle avec des opérations de la méthode des séquents. Donc, les formules du côté gauche du (sous-)tableau sont écrites comme l'antécédent du séquent correspondant, et les formules du côté droit sont écrites comme le conséquent. Donc dans cette notation, les règles deviennent :

$$(\mathrm{G}.\vee) \quad \frac{\Gamma, (S_1 \vee S_2) \rightarrow \Delta}{\Gamma, S_1 \rightarrow \Delta \quad \Gamma, S_2 \rightarrow \Delta}$$

$$(\mathrm{G}.\wedge) \quad \frac{\Gamma, (S_1 \wedge S_2) \rightarrow \Delta}{\Gamma, S_1, S_2 \rightarrow \Delta}$$

$$(\mathrm{G.e}) \quad \frac{\Gamma, (\exists x) S[x] \rightarrow \Delta}{\Gamma, S[b] \rightarrow \Delta}$$

Ici, *b* est une constante individuelle nouvelle. Las constantes introduites par cette règle sont appelées les noms factices.

(G.a) $$\frac{\Gamma, (\forall x)S[x] \to \Delta}{\Gamma, (\forall x)S[x], S[b] \to \Delta}$$

Ici, b est une constante individuelle qui a une occurrence dans Γ, Δ ou $S[x]$.

En fait, (G.a) est un cas spécial d'une règle plus générale :

(G.A) $$\frac{\Gamma, (\forall x)S[x] \to \Delta}{\Gamma, (\forall x)S[x], S[t] \to \Delta}$$

Ici, t est un terme construit par les constantes fonctionnelles et les constantes individuelles. Elles ont une occurrence dans Γ, Δ ou $S[x]$.

Les règles au côté droit sont :

(D.∨) $$\frac{\Gamma \to \Delta, (S_1 \vee S_2)}{\Gamma \to \Delta, S_1, S_2}$$

(D.∧) $$\frac{\Gamma \to \Delta, (S_1 \wedge S_2)}{\Gamma \to \Delta, S_1 \quad \Gamma \to \Delta, S_2}$$

(D.e) $$\frac{\Gamma \to \Delta, (\exists x)S[x]}{\Gamma \to \Delta, (\exists x)S[x], S[b]}$$

Ici, b est une constante individuelle qui a une occurrence dans Γ, Δ ou $S[x]$.

(D.a) $$\frac{\Gamma \to \Delta, (\forall x)S[x]}{\Gamma \to \Delta, S[b]}$$

b est une nouvelle constante individuelle.

(D.E) $$\frac{\Gamma \to \Delta, (\exists x)S[x]}{\Gamma \to \Delta, (\exists x)S[x], S[t]}$$ t est un terme construit par les constantes fonctionnelles et les constantes individuelles. Elles ont une occurrence dans Γ, Δ ou $S[x]$.

Pour les formules qui sont de la forme d'une négation normale, nous allons utiliser les règles qui suivent :

$$(\text{G.}\neg\vee)\frac{\Gamma, \neg(S_1 \vee S_2) \to \Delta}{\Gamma, (\neg S_1 \wedge \neg S_2) \to \Delta}$$

Nous abrégeons les règles pour les autres connecteurs et les quantificateurs.

Nous avons besoin de quelques règles appropriées, qui nous permettent de permuter des membres du côté gauche ou du côté droit d'un séquent, avec des règles de fermeture. Donc les règles suivantes peuvent servir comme des règles de fermeture :

(F.T) Un tableau est fermé ssi tous ses sous-tableaux sont fermés.

Un sous-tableau est fermé s'il inclut une des règles suivantes :

(F.G) $\Gamma, S_1, \neg S_1 \to \Delta$

(F.D) $\Gamma \to \Delta, S_1, \neg S_1$

(F.GD) $\Gamma, S_1 \to \Delta, S_1$

Si l'identité est incluse dans le langage sous-jacent, nous avons besoin de règles de la substitution. Par exemple, les règles seront :

$$(\text{GG.=}) \quad \frac{\Gamma, S[a], (a = b) \to \Delta}{\Gamma, S[a], S[b], (a = b) \to \Delta}$$

$$(\text{GD.=}) \quad \frac{\Gamma, (a = b) \to \Delta, S[a]}{\Gamma, (a = b) \to \Delta, S[a], S[b]}$$

Nous avons besoin de règles pour identité aussi. Par exemple, une règle qui dit qu'un tableau est fermé s'il inclut une règle suivante :

(F.G=) $\Gamma, \neg(a = a) \rightarrow \Delta$

Pour des raisons qui vont devenir claires, il convient de généraliser (G.e) et (D.a) de permettre l'instanciation fonctionnelle :

(G.E) $$\frac{\Gamma, S_0[(\exists x)S_1[x]] \rightarrow \Delta}{\Gamma, S_0[S_1[f(y_1,...,y_n)]] \rightarrow \Delta}$$

Ici, f est une nouvelle constante fonctionnelle et $(\forall y_1),...,(\forall y_n)$ sont tous les quantificateurs universels dans S_0. $(\exists x)S_1[x]$ a une occurrence dans la portée des quantificateurs. De telles constantes fonctionnelles sont appelées des fonctions factices.

(D.A) $$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, S_0[(\forall x)S_1[x]]}{\Gamma \rightarrow \Delta, S_0[S_1[f(y_1,...,y_n)]]}$$

f est une nouvelle constante fonctionnelle, et $(\forall y_1),...,(\forall y_n)$ sont tous les quantificateurs universels dans S_0. $(\forall x)S_1[x]$ a une occurrence dans la portée des quantificateurs.

(G.e) est un cas spécial de (G.E).

En suite, il convient de généraliser $(G.\vee)$ et $(D.\wedge)$ aussi à permettre l'instanciation fonctionnelle :

$$(\text{G.}\vee\text{f})\quad \frac{\Gamma, S_0[(S_1 \vee S_2)] \rightarrow \Delta}{\Gamma, S_0[(S_1 \wedge f(y_1,\ldots,y_n)=0) \vee (S_2 \wedge f(y_1,\ldots,y_n) \neq 0)] \rightarrow \Delta}$$

Ici, f est une nouvelle constante fonctionnelle (fonction factice) nouvelle, et $(\forall y_1),\ldots,(\forall y_n)$ sont tous les quantificateurs universels dans S_0. $(S_1 \vee S_2)$ a une occurrence dans la portée des quantificateurs.

$(\text{D.}\wedge\text{f})$ analogiquement.

$(\text{G.}\vee)$ et $(\text{D.}\wedge)$ sont des cas spéciaux de $(\text{G.}\vee\text{f})$ et $(\text{G.}\vee\text{f})$.

4.2. Les règles pour l'interrogation

D'abord, nous allons voir la notion de « présupposition ». En même temps, nous allons voir aussi la notion de « réponse ». Dans ce processus, nous devons distinguer différentes sortes de questions.

Dans la question propositionnelle, la présupposition est une disjonction :

$(S_1 \vee \ldots \vee S_n)$

et, les réponses possibles sont $S_1,\ldots,S_n$. Dans la question (non-multiple) « Que », « Où », « Qui », « Quand » et « Quel », ce que la personne qui interroge cherche est un individu, dépendant possiblement d'autres individus. La présupposition de telles questions peut être chaque énoncé contenant des quantificateurs existentiel ou des disjonctions :

(4.2.1) $S_0[(\exists x)S_1[x]]$

Donc, une réponse à la question est :

(4.2.2) $S_0[S_1[f(y_1,...,y_n)]]$

$(\forall y_1),...,(\forall y_n)$ sont tous les quantificateurs universels dans (4.2.1). $\exists x$ a une occurrence dans la portée des quantificateurs.

Maintenant, nous pouvons avoir une règle pour l'interrogation.

(G.I) Si la présupposition d'une question a une occurrence du côté gauche d'un sous-tableau, il se peut que la personne qui interroge pose la question correspondant à l'oracle. Si l'oracle répond, la réponse est ajoutée au côté gauche d'un sous-tableau.

Évidemment, dans la discussion ordinaire, la réponse n'est pas souvent un énoncé comme (4.2.2), mais une fonction substituant *f* ou un terme substituant.

Cela veut dire que nous interprétons les questions « Que », « Où », « Qui », « Quand » et « Quel » comme les questions qui demandent un « exemple ». La personne qui interroge n'essaye pas d'identifier tous les individus qui satisfont une certaine condition. La personne qui interroge se satisfait justement d'un seul individu. Pareillement, dans la question propositionnelle dont la présupposition est $(S_1 \vee S_2 \vee ... \vee S_n)$, une seule des alternatives $S_1, S_2, ..., S_n$ peut satisfaire la personne qui interroge.

Nous devons remarquer qu'il y a aussi des questions pour lesquelles les alternatives sont des propositions. Mais ces propositions dépendent de certains individus. Donc, nous pouvons écrire telles questions avec une forme suivante :

$S_0[(S_1 \vee ... \vee S_n)]$,

Par exemple :

(4.2.3) $S_0[(S_1 \vee S_2)]$

Nous pouvons donc formuler une réponse de cette forme :

(4.2.4) $S_0[(S_1 \wedge f(y_1,...,y_n) = 0) \vee (S_2 \wedge f(y_1,...,y_n) \neq 0)]$

Ici, $(\forall y_1),...,(\forall y_n)$ sont tous les quantificateurs universels dans (4.2.3). $(S_1 \vee S_2)$ a une occurrence dans la portée des quantificateurs. Quand il n'y a aucuns de ces quantificateurs, il y a deux réponses possibles, $S_0[S_1]$ et $S_0[S_2]$.

Avec ces règles, nous pouvons définir certains jeux interrogatifs. Pourtant, strictement dites, ces règles ne définissent qu'une variante de l'enquête interrogative qui n'a pas de la coupe. Donc, un type plus général de l'enquête interrogative est défini quand nous ajoutons quelques règles suivantes à nos règles :

(G.taut) $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma, (S \vee \neg S) \rightarrow \Delta}$

(D.cont) $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, (S \wedge \neg S)}$

Ici, *S* est une formule arbitraire du langage sous-jacent. En pratique (G.taut) est la même chose que « la règle de coupe » des théoriciens de la démonstration.

Nous pouvons appeler une logique interrogative qui inclut (G.taut) et (D.cont) *une logique interrogative étendue*.

4.3. Les notions de questions et de réponses

Nous devons maintenant voir les notions comme le desideratum, la présupposition et la réponse concluante. Pour cela, prenons des exemples en utilisant (4.4.7)-(4.4.8) ci-dessus. Il y a des notions importantes dans la théorie que nous devons clarifier.

(4.3.1) Qui a tué Roger Ackroyd ?

Ce qui est sémantiquement importante dans (1), c'est le desideratum. Le desideratum d'une question est une description de l'état épistémique de choses. Quelqu'un qui a posé la question veut changer l'état épistémique de choses. Dans le cas de (1), son desideratum est :

(4.3.2) Je sais qui a tué Roger Ackroyd.

En symboles :

(4.3.3) $(\$x)KM(x,r)$

ou, à la formule équivalente:

(4.3.4) $K(\$x/K)M(x,r)$

Ici $K =$ *je sais que* et la barre oblique « / » exempte un constituant logiquement actif (dans ce cas-là c'est $(\$x)$) de la portée sur laquelle l'opérateur logique a un effet (dans ce cas-là *K*).

Voyons maintenant ce qu'est la présupposition d'une question. La présupposition d'une question est obtenue à partir du desideratum en omettant toutes les conditions de la barre oblique des quantificateurs $\$$ s et des disjonctions $\vee$ s qui le portent. Autrement dit :

desideratum – $/K$ = présupposition.

Et aussi :

présupposition - $(\$x)$ = matrice.

Par exemple, la présupposition de (4.3.1) est :

$$(4.3.5)\quad K(\$x)M(x,r)$$

(4.3.5) rapporte seulement que je sais que Roger Ackroyd a été tué. Nous devons comparer (4.3.2) et (4.3.5).

Une réponse pour (4.3.1) est un énoncé de la forme suivante :

$$(4.3.6)\quad KM(b,r)$$

b est un certain terme singulier. Mais il y a un problème. Ce que la réponse donne à quelqu'un qui a posé la question, c'est l'état de choses. Cela n'est pas l'état de choses que celui qui a posé la question voulait avoir. C'est le desideratum qu'il voulait avoir. En bref, la réponse n'était pas la réponse concluante. Donc la réponse de la question satisfera l'interrogateur si et seulement si (4.3.6) implique logiquement (4.3.3).

Mais l'implication $(4.3.6) \exists$ (4.3.3) ne tient pas toujours. Donc une prémisse supplémentaire est nécessaire pour sa validité. La prémisse additionnelle, on l'appelle la condition de conclusiveté, est nécessaire. Dans le cas (4.3.1), la condition de conclusiveté est :

$$(4.3.7)\quad K(\$x/K)(b = x)$$

Intuitivement dit :

(4.3.8) Je sais qui est *b*.

C'est la solution du problème « Quand une réponse pour une question Q est-elle une vraie réponse pour cette question ? ». C'est seulement quand « b » satisfait la matrice de (4.3.1) et la condition :

$$(4.3.9)\quad (\$x)(b = x),$$

que « b » est une réponse concluante pout (4.3.1).

Comme nous l'avons vu, pour la réponse concluante deux choses sont nécessaires. La réponse à la question et la condition de conclusiveté correspondante.

4.4. Indépendance informatique de la lettre initiale de l'énoncé, *K*.

La caractéristique de la théorie des jeux dans la sémantique que nous avons développée, elle nous permet d'avoir des disjonctions et des quantificateurs existentiels qui sont indépendants informatiquement de la lettre initiale de l'énoncé, *K*. Avec cette indépendance, il nous est possible d'avoir la réalisation logico-sémantique précise de l'élément de la question, l'élément qui apparait dans le langage naturel. Nous indiquons une telle indépendance par la notation de la barre oblique. La barre oblique « / » exempte un constituant logiquement actif de la portée sur laquelle l'opérateur logique a un effet. Par exemple, $(\exists x / K)$ au lieu de $(\exists x)$, et $(\vee / K)$ au lieu de $\vee$.

Grâce à cette notation, nous pouvons exprimer la forme logique de tous les différents types de connaissance.

Pour donner des exemples simples de la notation de la barre oblique, nous donnons des exemples de la connaissance non multiple.

La connaissance considérée maintenant est représentée par *les énoncés de la connaissance*. Ils sont de la forme KS. *S* est un énoncé ordinaire du premier ordre. Mais, il y a une exception. Cette exception est qu'un des quantificateurs

$(\exists x)$ est remplacé par $(\exists x / K)$, et qu'une des disjonctions $(S_1 \vee S_2)$ est remplacée par $(S_1(\vee / K)S_2)$. Et aussi, pour simplifier, nous écrivons *K* au lieu de K_i. Notre traitement de ce cas peut être appliqué facilement pour le cas où plusieurs barres obliques apparaissent.

Donc, les exemples sont suivants :

(4.4.1a) Je sais que *S*.

(4.4.1b) KS

(4.4.2a) Je sais si *S*.

(4.4.2b) $K((S(\vee / K)\neg S))$

(4.4.3a) Je sais que c'est S_1 ou S_2.

(4.4.3b) $K(S_1(\vee / K)S_2)$

(4.4.4a) Je sais qui (supposons *x*) est tel que $S[x]$.

(4.4.4b) $K(\exists x / K)S[x]$

(4.4.5a) Je sais à qui chaque personne a la relation $S[x, y]$.

(4.4.5b) $K(\forall x)(\exists y / K)S[x, y]$

(4.4.6a) Je sais, à propos de chaque personne (supposons *x*), s'il ou elle satisfait la condition $S_1[x]$ ou $S_2[x]$.

(4.4.6b) $K(\forall x)(S_1[x](\vee / K)S_2[x])$

(4.4.1)- (4.4.4) ont une représentation équivalente à première ordre sans barre oblique. Mais (4.4.5)- (4.4.6) ne l'ont pas. Par exemple :

(4.4.7) $K(\$x / K)M(x, r)$

(4.4.8) $K(\$x)M(x, r)$

Ici, nous pouvons considérer $M(x,r)$, par exemple, comme « x a tué Roger Ackroyd ». Donc (4.4.7) signifie « Je sais qui a tué Roger Ackroyd». Mais (4.4.8) rapporte seulement que je sais que Roger Ackroyd a été tué. C'est la différence.

4.5. La logique épistémique pour les questions et les réponses

Ces différents genres d'énoncés de connaissance peuvent opérer comme les desiderata de plusieurs sortes des questions. Le desideratum d'une question spécifie son état épistémique. Et, une réponse concluante pour un état épistémique qui est amenée est calculée (en supposant que la présupposition de la question est vraie). Donc maintenant, nous allons voir les questions directes dont les desiderata sont (4.4.2)-(4.4.6). Les questions sont exprimées comme ce qui suivent :

(4.5.1c) C'est le cas que S ?

(4.5.2c) C'est le cas que S_1 ou S_2 ?

(4.5.3c) Qui (supposons x) est tel que $S[x]$?

(4.5.4c) À qui chaque personne a la relation $S[x,y]$?

(4.5.5c) Chaque personne (supposons x) satisfait la condition $S_1[x]$ ou $S_2[x]$?

Notre notation de la barre oblique nous permet de formuler tous concepts fondamentaux des questions et des réponses. Par exemple, comme nous l'avons déjà vu, la présupposition d'une question est obtenue à partir de desideratum en omettant toutes les conditions de la barre oblique des quantificateurs $\$$ s et des disjonctions ⁄ s qui la portent. Donc les présuppositions de (4.5.1c)- (4.5.5c) sont :

(4.5.1d) $K(S \vee \neg S)$

(4.5.2d) $K(S_1 \vee S_2)$

(4.5.3d) $K(\exists x)S[x]$

(4.5.4d) $K(\forall x)(\exists y)S[x, y]$

(4.5.5d) $K(\forall x)(S_1[x] \vee S_2[x])$

Une réponse est obtenue par le desideratum en omettant les quantificateurs avec la barre oblique, et en remplaçant les variables liées par les quantificateurs ou une constante fonctionnelle appropriée. Par exemple, les formulations logiques des réponses à (4.5.1c)- (4.5.5c) sont :

(4.5.1e) $KS, K\neg S$

(4.5.2e) KS_1, KS_2

(4.5.3e) $KS[b]$

(4.5.4e) $K(\forall x)S[x, f(x)]$

(4.5.5e) $K(\forall x)((S_1[x] \wedge f(x) = 0) \vee (S_2[x] \wedge f(x) \neq 0))$

Une réponse est une réponse concluante, si et seulement si, l'identité des références de tous les individus substitués et de toutes les constantes fonctionnelles, est connue. Donc, par exemple, les conditions de conclusiveté pour (4.5.3e)- (4.5.5e) sont :

(4.5.3f) $K(\exists x/K)(b = x)$

(4.5.4f) =(4.5.5f) $K(\forall x)(\exists y/K)(f(x) = y)$

Les formes logiques équivalentes de (4.5.3f)- (4.5.5f) sont :

$K(\exists g/K)(\forall x)(f(x) = g(x))$

$(\exists g)K(\forall x)(f(x) = g(x))$

Donc nous voyons que (4.5.3f) et (4.5.5f) sont les mêmes choses.

Comme nous avons vu, la réponse à une question implique logiquement son desideratum, si les conditions de conclusiveté sont satisfaites. Les conditions de conclusiveté caractérisent la relation entre la question et la réponse (concluante).

4.6. La possibilité de formuler un ensemble de règles pour la logique interrogative épistémique

À première vue, il se pourrait qu'il nous semble impossible à formuler un ensemble complet des règles pour la logique interrogative épistémique. Cette impossibilité vient de la logique IF du premier ordre. Normalement pour la logique IF du premier ordre, un ensemble complet de règles pour la démonstration ne peut pas être formulé. Mais il existe un ensemble complet de règles pour la réfutation, c'est-à-dire, la démonstration de la contradiction logique. Ce fait est lié au fait que les langages IF du premier ordre ne sont pas fermés par rapport à la négation contradictoire. Les énoncés les plus simples dont les négations contradictoires échouent à être exprimable dans un langage IF du premier ordre, ce sont les formules du quantificateur de Henkin[3]. Ces formules ont la forme suivante :

(4.6.1) $(\forall t)(\exists x)(\forall y)(\exists z / \forall t)S[t, x, y, z]$

Maintenant, il se peut que les énoncés de connaissance soient les énoncés qui ont la même structure du quantificateur que des formules du quantificateur de Henkin. Parce que nous pouvons considérer que l'opérateur de la connaissance K est un camouflage du quantificateur universel. Par exemple, il se peut que les énoncés de connaissance de la forme suivante semblent avoir les mêmes difficultés, comme les difficultés des énoncés du quantificateur de Henkin dans la logique IF du premier ordre.

(4.6.2) $K(\exists x)(\forall y)(\exists z / K)S[x, y, z]$

Heureusement, notre prévision s'avère être incorrecte. Parce que le

---

[3] Le quantificateur le plus simple de Henkin Q_H est :

$$(Q_H x_1, x_2, y_1, y_2)\phi(x_1, x_2, y_1, y_2) \equiv \begin{pmatrix} \forall x_1 \exists y_1 \\ \forall x_2 \exists y_2 \end{pmatrix} \phi(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

C'est equivalent avec sa Skolemization du second ordre (en faite, toute formule avec le préfix de Henkin est equivalente avec sa Skolemization du second ordre). Par exemple :

$\exists f \exists g \forall x_1 \forall x_2 \phi(x_1, x_2, f(x_1), g(x_2))$.

« quantificateur » K n'est pas standard dans un sens. Pour voir ce fait en détail, considérons un énoncé de la connaissance de la forme :

(4.6.3) $K(\forall x)(\exists y / K)S[x, y]$

Cet énoncé est vrai si et seulement si :

(4.6.4) $(\exists f)K(\forall x)S[x, f(x)]$

Mais, si f est considéré comme une fonction de deux variables, x et k, l'alternative épistémique pertinente $f(x,k)$ ne peut pas être choisie arbitrairement. Elle doit être une fonction de l'*individu* x qui est bien définie pour toutes les alternatives épistémiques. Il s'ensuit que quoi qu'il arrive, la valeur de x dans deux alternatives est la même, la valeur de $f(x)$ dans les deux alternatives doit être même aussi. Ce résultat limite l'ensemble de la fonction f sur laquelle le quantificateur de la fonction $(\exists f)$ s'étend. Et le résultat change ce quantificateur de la fonction $(\exists f)$ en quantificateur du premier ordre qui s'étend sur les individus bien définis dans toutes les alternatives.

Donc, pour cette raison-là, bien qu'il y ait la présence du phénomène de l'indépendance informationnelle, il se peut que nous espérions pouvoir formuler un ensemble complet de règles pour l'enquête interrogative.

4.7. Les règles épistémique pour la logique interrogative

Pour formuler les règles nouvelles la logique interrogative, nous supposons toujours que toutes les formules que nous traitons est celles de la forme d'une négation normale.

Les règles de la logique interrogative pour les notions épistémiques peuvent être formulées avec les termes que nous appelons les k-séquents. Nous pouvons considérer que les k-séquents sont les séquents ordinaires dans lesquels chaque formule est considérée comme contenant une initiale *K* supprimée, et dans lesquels initialement il y a une seule formule du côté droit. Avec les termes de k-séquents, nous pouvons formuler les règles suivantes :

(G.$\wedge$), (G.$\vee$ f), (D.$\wedge$ f), (D.$\vee$), (G.E), (D.A), (G.A), (D.E) comme ce qui sont ci-dessus.

(G.E/K) $$\frac{\Gamma, S_0[(\exists x / K)S_1[x]] \rightarrow \Delta}{\Gamma, S_0[S_1[f(y_1,...,y_n)]], (\forall y_1),...,(\forall y_i)(\exists x / K)(f(y_1,...,y_i) = x) \rightarrow \Delta}$$

Ici, *f* est un nouveau symbole de la fonction et $(\forall y_1),...,(\forall y_i)$ sont tous les quantificateurs universels dans $S_0[(\exists x / K)S_1[x]]$. $(\exists x / K)$ a une occurrence dans la portée des quantificateurs.

(D.E/K) $$\frac{\Gamma, (\exists x / K)(t = x) \rightarrow \Delta, S_0[(\exists x / K)S_1[x]]}{\Gamma, (\exists x / K)(t = x) \rightarrow \Delta, S_0[(\exists x / K)S_1[x]], S_0[S_1[t]]}$$

Ici, *t* est n'importe quel terme de la constante.

Dans notre variante épistémique de la logique interrogative, la règle d'introduction de la tautologie peut être formulée comme suit :

(G.taut) $$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma, K(S \vee \neg S) \rightarrow \Delta}$$

Ici, *S* est une formule quelconque du langage sous-jacent.

Nous ne pouvons pas bien formuler la règle (D.cont). Parce qu'il ne faut pas avoir plus d'une formule du côté droit du séquent :

$$\text{(D.cont)} \quad \frac{\Gamma \to KS_1}{\Gamma \to, K(S_1 \vee (S_2 \wedge \neg S_2))}$$

Ici, S_2 est n'importe quelle formule dans le langage approprié.

Nous avons besoin aussi de règles pour les disjonctions indépendantes :

$$\text{(G.}\vee\text{/K)} \quad \frac{\Gamma, S_0[S_1(\vee / K)S_2] \to \Delta}{\begin{array}{l}\Gamma, S_0[(S_1 \wedge f(y_1,...,y_i) = 0) \vee (S_2 \wedge f(y_1,...,y_i) \neq 0)] \wedge \\ (\forall y_1),...,(\forall y_i)(\exists x / K)(f(y_1,...,y_n) = x) \to \Delta\end{array}}$$

Ici, f est un nouveau symbole de la fonction et $(\forall y_1),...,(\forall y_i)$ sont tous les quantificateurs universels dans S_0. $(S_1(\vee / K)S_2)$ a une occurrence dans la portée des quantificateurs.

$$\text{(D.}\vee\text{/K)} \quad \frac{\Gamma \to \Delta, S_0[S_1(\vee / K)S_2]}{\Gamma \to \Delta, S_0[(\exists x / K)((S_1 \wedge x = 0) \vee (S_2 \wedge x \neq 0))]}$$

5. Question *pourquoi*

Dans ce chapitre, nous allons voir qu'il y a une différence entre la question *pourquoi* et les questions « Que », « Où », « Qui », « Quand » et « Quel ». Le but de la personne qui interroge, lorsqu'elle pose les questions « Que », « Où », « Qui », « Quand » et « Quel », est d'obtenir une conclusion ultime. Par contre, quand la personne qui interroge pose la question *pourquoi*, elle cherche le pont argumentatif entre les suppositions (les hypothèses ou les prémisses) initiales et la conclusion ultime. Quand la personne qui interroge pose une question *pourquoi*, le pont est la « réponse ». Donc nous définissons des conditions pour le pont. Une de ces conditions est la loi de couverture que nous allons définir.

Dans ce chapitre, nous allons traiter aussi le choix de l'élément questionné et la question *comment*.

5.1. La question la plus pertinente directement pour la question pourquoi

Nous avons déjà vu la théorie générale pour la logique interrogative dans le dernier chapitre. Mais le genre de questions la plus pertinente pour la question *pourquoi*, est la question propositionnelle. Son desideratum a la forme suivante :

(5.1.1) $K(S_1(\vee/K)S_2(\vee/K)...(\vee/K)S_k)$

Nous pouvons écrire (5.1.1) comme une autre forme :

(5.1.2) $K(\vee_i/K)S_i$ $\quad$ (i=1,2,...,k)

Dans une notation plus courante, (5.1.1)-(5.1.2) peut être écrit comme ceci:

(5.1.3) $(KS_1 \vee KS_2 \vee ... \vee KS_k)$

(Cette distribution de K pour $(\vee/K)$ n'est pas toujours possible avec les questions plus complexes). Un exemple d'une question dont le desideratum est (5.1.1)-(5.1.3) peut être :

(5.1.4) Stig habite en Suède, en Norvège ou au Danemark ?

La présupposition de (5.1.1) est :

(5.1.5) $K(S_1 \vee S_2 \vee ... \vee S_k)$.

Donc la réponse à cette question propositionnelle est :

(5.1.5) KS_0

Ici, la condition de conclusiveté correspondante est :

(5.1.6) $K((S_0 \rightarrow S_1)(\vee / K)(S_0 \rightarrow S_2)(\vee / K)...(\vee / K)(S_0 \rightarrow S_k))$

C'est :

(5.1.7) $K(\vee_i / K)(S_0 \rightarrow S_i)$.

Avec cette question propositionnelle, nous allons voir la théorie de la question *pourquoi*.

5.2. $k = 1$ pour la théorie de la question pourquoi

Avec la théorie générale des questions et des réponses, nous obtenons la base pour la théorie de la question *pourquoi*. Nous obtenons la théorie de la question *pourquoi* par une stratégie qui est couramment utilisée par les scientifiques. Nous faisons du paramètre important, qui est caractéristique de la situation en question, le paramètre de la valeur extrême, comme zéro ou infinie.

Ici, notre paramètre est *k*. Sa valeur extrême est $k = 1$. Dans le cas $k = 1$, il nous semble que tout devient trivial. Dans le cas $k = 1$, nous n'avons plus la structure logique qu'on traite. En fait, l'élément $(\exists / K)$ a aussi disparu des desiderata de ce genre de « questions » .

Comme nous l'avons vu, il nous semble que le cas spécial $k=1$ est trivial pragmatiquement et aussi logiquement. Quand $k=1$, le desideratum de la question est élémentaire ;

$K(S_1(\vee/K)S_2(\vee/K)...(\vee/K)S_k)$

cette formule devient :

KS_1

Mais c'est aussi la présupposition de la même question. Donc la transition de la présupposition au desideratum ne nous donne pas du tout de nouvelle information ou de changement de situation.

5.3. La question principale et opérationnelle

Les questions jouent deux rôles fondamentalement différents dans l'enquête interrogative. Le but du jeu tout entier est peut-être de répondre à une question. Cette « grande » question est appelée *la question principale* de l'enquête. Une partie de la signification de répondre à une question, elle est de poser des « petites » questions à l'oracle. Les « petites » questions doivent définitivement être distinguées de la question principale. Elles sont appelées *des questions opérationnelles*. Ce que nous posons la question principale au lieu d'une question opérationnelle à l'oracle, est une faillite.

Cette distinction entre deux rôles différents des questions, est une sorte de distinctions pragmatique. Les philosophes et les linguistes doivent vraiment faire attention à cette distinction pour étudier les deux fonctions des questions dans l'enquête.

La question « quelle est la question principale ? » est répondue par répondre toute la question opérationnelle. Il est nécessaire de présenter explicitement les éléments épistémiques. Les éléments sont présentés tacitement dans la version simple originale du modèle interrogatif. Quand nous avons la notation de la logique épistémique, nous pouvons indiquer la question, dans laquelle toute enquête est calculée à simplement répondre, en utilisant le desideratum de cette question comme une conclusion ultime du tableau interrogatif. Dans ce but-là, nous avons besoin de la notation de la logique épistémique. Bien sûr cette notation de la logique épistémique doit être utilisée dans l'enquête toute entière.

Tout énoncé du tableau qui est simple, comme l'énoncé préfixé par la notation de K et avec la barre oblique, nous devons penser que cela doit être utilisé pour exprimer une différente sorte de connaissance qui figure dans la relation entre les présuppositions et les réponses. Donc la classe des arguments interrogatifs devient une sous-classe de tout argument interrogatif possible. Cette sous-classe est caractérisée par le fait qu'aucun élément interrogatif, $(\exists / K)$ et/ou $(\vee / K)$, n'a pas d'occurrence dans toute réponse à la question opérationnelle. Cette question opérationnelle n'a pas encore d'occurrence dans ses présuppositions. Une enquête toute entière peut être traitée sans faire élément épistémique explicite s'il n'y a aucun ingrédient questionné, indiqué par $(\exists / K)$ et/ou $(\vee / K)$, dans la conclusion ultime.

Maintenant, nous voyons la perspicacité cruciale de la question *pourquoi*. Ici, la distinction entre la question principale et la question opérationnelle est très importante. La question *pourquoi* ne peut pas servir comme une question opérationnelle dans l'enquête. Elle peut plutôt servir comme question principale dans l'enquête. Pour le modèle interrogatif, il nous semble que la présupposition de la question principale de l'enquête, ne joue aucun rôle dans l'enquête. Chaque étape interrogative dans l'enquête est une étape d'une suite de la présupposition de la question opérationnelle à son desideratum. Mais l'enquête elle-même n'est pas de suite de la présupposition de la question principale à son desideratum.

Le cas où la question principale de l'enquête entière est une question élémentaire triviale comme $k=1$, n'est pas étrange. C'est justement le cas que la conclusion de l'enquête ne contient aucun élément $/K$.

Quand $k=1$, il nous semble que les enquêtes interrogatives sont inutiles. Mais quand $k=1$, si nous posons la question dans les enquêtes interrogatives, une des réponses de ces enquêtes sera considérée comme la réponse de la question *pourquoi*. C'est-à-dire que la réponse nous indique *pourquoi* la conclusion ultime est vraie.

Donc maintenant, nous pouvons dire que la question *pourquoi* peut servir comme les questions principales pour l'enquête interrogative entière.

Nous devons remarquer ici que du fait que la question *pourquoi* peut servir comme les questions principales de l'enquête interrogative entière, nous ne pouvons pas dire que les questions *pourquoi* ont une occurrence (avec leurs réponses) dans les étapes de l'enquête interrogative. Évidemment ce que nous pouvons dire de ce fait, c'est justement que ces questions *pourquoi* n'opèrent pas comme les questions opérationnelles.

Les questions *pourquoi* qui ont une occurrence (avec ses réponses) dans les étapes de l'enquête interrogative, sont des questions principales d'un niveau inférieur. Chaque question est une question principale de sa petite enquête. C'est possible parce que l'enquête interrogative peut être, et est réellement, un processus qui a beaucoup de niveaux. Cette caractéristique qu'un processus a beaucoup de niveaux, n'est pas triviale. Cette caractéristique devient la distinction entre la question principale et la question opérationnelle.

Il y a une chose curieuse dans l'usage des questions *pourquoi* comme questions opérationnelles. C'est que ces réponses qui entrent au processus supérieur de la question comme des prémisses nouvelles, ne sont pas des conclusions ultimes de l'enquête interrogative d'un niveau inférieur.. C'est parce que, dans le cas des questions *pourquoi*, on connaît déjà bien la conclusion ultime de l'enquête interrogative au début de l'enquête.

Autrement dit, dans l'usage ordinaire, la notion de réponse est utilisée à la manière logiquement différente. La notion de réponse à la question *pourquoi* est différente de celle de réponse aux autres questions.

Maintenant nous allons voir comment, les concepts principaux de la théorie générale des questions et des réponses, sont appliqués aux questions *pourquoi*.

La notion de la présupposition n'est pas difficile. Dans le cas de la question *pourquoi*, nous pouvons considérer que la présupposition est la « réponse » de la théorie générale des questions et des réponses dans le sens de la conclusion ultime. C'est vraiment normal. Parce que nous ne pouvons pas dire qu'on est en train d'expliquer « pourquoi c'est le cas *S* » sans connaître *S*. Donc, nous pouvons dire que la présupposition pour la question *pourquoi* a un même sens que la présupposition pour les autres questions dans la théorie générale des questions et des réponses.

En revanche, la notion de « réponse » est assez difficile à traiter dans la théorie générale des questions et des réponses. Nous avons besoin de plus d'analyse. La notion précise de réponse aux autres questions est l'explication de la notion préthéorique de réponse. Cette notion préthéorique dit que la réponse est quelque chose que nous avons quand la personne qui interroge répond à la question. Mais si c'était le cas, la notion préthéorique de la réponse devrait vouloir dire quelque chose de différent des autres questions quand nous considérons la question *pourquoi*. Le but pragmatique de poser la question *pourquoi* est tout à fait différent du but de poser une autre question. Nous avons déjà vu que le but de la personne qui interroge lorsqu'elle pose les questions « Que », « Où », « Qui », « Quand » et « Quel » est qu'elle obtient la conclusion ultime. Par contre, quand la personne qui interroge pose une question *pourquoi*, elle cherche le pont argumentatif entre les suppositions (les hypothèses ou les prémisses) initiales et la conclusion ultime. Quand la personne qui interroge pose une question *pourquoi*, le pont est la « réponse ». Donc, nous n'appelons pas la conclusion ultime la réponse, quand nous traitons une question *pourquoi*. Mais nous l'appelons l'*explanandum*.

5.4. Le théorème de la loi de couverture

Maintenant, nous devons encore faire attention à la pragmatique de la question *pourquoi* encore. Quand la personne qui interroge traite une question *pourquoi*, elle traite l'explanandum qui traite la circonstance qui n'est pas couverte directement par la prémisse initiale *T*. Nous pouvons expliquer cette situation avec une supposition que l'explanandum contient une constante *b* (en général, c'est une constante non logique) qui n'a pas d'occurrence dans la prémisse initiale *T*. Nous supposons que la question *pourquoi* a la relation avec *b*, autrement dit, nous pouvons exprimer cette supposition comme une question « Pourquoi *b* est tel ou tel ? ». Maintenant nous considérons un cas spécial où l'explanandum est de forme simple $P(b)$, P est un prédicat à une place. Nous supposons aussi que *A* est un total de réponses que la personne qui interroge peut obtenir de l'oracle. Nous allons utiliser la logique du premier ordre. Nous pouvons traiter *T* et *A* comme un énoncé grâce à la compacité de la logique. En utilisant *A*, chaque $P(b)$ est dérivable de la prémisse initiale *T* interrogativement. Donc la conséquence logique suivante est tenue :

$(T \wedge A) \vdash P(b)$

Supposons cette formulation là, nous pouvons donner diverses formulations dans lesquelles la situation peut être banalisée. Nous pouvons supposer ceci :

(*i*) $(T \wedge A) \vdash P(b)$

(*ii*) non $T \vdash P(b)$

(*iii*) non $A \vdash P(b)$

(*iv*) *b* n'a pas d'occurrence dans *T*

(v) P n'a pas d'occurrence dans A

Dans ces conditions (i) – (v), (ii) et (iii) sont évidemment triviales. (iv) exprime la situation dans laquelle l'explanandum n'est pas réellement ce que b est déjà mentionné dans la prémisse initiale T de l'explication. (v) n'est pas si important.

Si ces conditions (i) – (v) sont satisfaites, nous pouvons prouver la chose suivante. La formule *H* existe ou plus exactement :

$H[b]$

tel que :

(a) $T \vdash (\forall x)(H[x] \rightarrow P(x))$

(b) Toute constante de *H* a une occurrence dans *T* et *A* (un total des réponses que la personne qui interroge peut obtenir de l'oracle) sauf *b*.

(c) $A \vdash H[b]$

Si nous considérons les conditions (v) P n'a pas d'occurrence dans A, nous pouvons ajouter la quatrième condition :

(d) Si *P* n'a pas d'occurrence dans *A*, *P* n'a pas d'occurrence dans $H[b]$.

Ce méta-théorème pourra être appelé (un cas spécial du) théorème de la loi de couverture.

Démonstration du théorème de la loi de couverture (d'un cas spécial):

T et *A* sont des ensembles de formules fermées de la logique du premier ordre. Grâce à la compacité de la logique du premier ordre, ils peuvent être traités comme un énoncé.

Selon la supposition (i) $(T \wedge A) \vdash P(b)$. Donc :

(A) $A \vdash T \rightarrow P(b)$

Quand nous regardons (A), nous pouvons savoir que, par (iii), A est cohérent ,et par (ii), que la conclusion de (A) n'est pas de vérité logique. Donc, par le théorème de l'interpolation de William Craig[4], il y a $I[b]$ tel que :

(B) $A \vdash I[b]$

(C) $I[b] \vdash T \supset P(b)$

Toute constante de $I[x]$ est partagée par T et A. En particulier, P n'a pas d'occurrence dans $I[b]$, parce que P n'a pas d'occurrence dans A.

Alors, par (C) :

(D) $T \vdash I[b] \supset P(b)$

Parce que b n'a pas d'occurrence dans T, par (D) :

(E) $T \vdash (\forall x)(I[x] \supset P(x))$

Par (E) et (B), nous pouvons considérer que $I[x]$ sert comme $H[x]$. □[5]

---

[4] Le théorème de l'interpolation de William Craig ;

Si,

$\Gamma \vdash \Delta$

alors, il y a une formule C telle que :

$\Gamma \vdash C$ et $C \vdash \Delta$

et aussi telle que :

Tout prédicat qui a positivement une occurrence dans C a positivement une occurrence dans Γ et dans Δ.

Tout prédicat qui a négativement une occurrence dans C a négativement une occurrence dans Γ et dans Δ.

« Three Uses of the Herbrand-Gentzen Theorem in Relatiing Model Theory and Proof Theory », *Journal of Symbolic Logic*, XXII (1957): 269-85.

[5] Le théorème de la loi de couverture (le cas général)

C'est un résultat que nous pouvons utiliser pour développer l'idée essentielle suivante.

Ce résultat nous fait voir que les questions *pourquoi* comme les questions principales de l'enquête interrogative, ont une sorte de structure. En particulier, une question pourquoi qui opère comme question principale d'une enquête et qui satisfait les conditions (i) – (iv), implique une « condition initiale » $H[b]$ et la loi de couverture $T \ \vdash (\forall x)(H[x] \to P(x))$.

La généralisation de ce résultat est obtenue facilement en substituant l'explanandum par un énoncé arbitraire contenant *b*, par exemple $C[x]$. Donc la généralisation est :

(a)* $T \ \vdash (\forall x)(H[x] \to C(x))$

(b)* Toute constante de *H* a une occurrence dans *T* et *A* (un total de réponses que la personne qui interroge peut obtenir de l'oracle) sauf *b*.

Soit *T* une théorie dans le langage *L* du premier ordre et $F = F[b_1,...,b_n]$ un énoncé tel que $F[x_1,...,x_n]$ est une formule de *L* et $b_1,...,b_n \in \mathrm{do}(M)$. Supposons que $M : T \ \vdash F$ est établi par un ensemble de constantes *A*. Supposons que *A* est consistent et que *T* n'implique pas $F[b_1,...,b_n]$. Si d'autres constantes que $b_1,...,b_n$ de *F* n'ont pas d'occurrence dans *A* et si $b_1,...,b_n$ n'ont pas une occurrence dan *T*, alors il y a une formule $H[x_1,...,x_n]$ de *L* telle que :

(a) $T \ \vdash (\forall x_1)...(\forall x_n)(H[x_1,...,x_n] \to F[x_1,...,x_n])$

(b) $T \ \vdash H[a_1,...,a_n]$

(c) Aucune constante de $F[x_1,...,x_n]$ n'a pas d'occurrence dans $H[x_1,...,x_n]$.

(c)* $A \vdash H[b]$

Et, la condition (d) est comme ceci :

(d)* Si les constantes non-logiques de $C[b]$ n'ont pas d'occurrence dans A, $C[b]$ n'a pas d'occurrence dans $H[b]$.

Nous devons remarquer que l'existence de la loi de couverture ;

$(\forall x)(H[x] \to C(x))$

est obtenue par les suppositions, dans lesquelles nous ne supposons rien sur la forme logique de T et A, et qui effacent les cas spéciaux triviaux.

Nous devons remarquer aussi que *T* ne peut pas être logiquement (conceptuellement) vrai par (i) et (iii).

Nous avons dit que les questions *pourquoi* comme les questions principales de l'enquête interrogative, ont une sorte de structures. Cette structure logique est créée par la conséquence d'analyse pragmatique dans laquelle les questions *pourquoi* sont utilisées. Cette structure montre comment nous pouvons appliquer naturellement des notions, qui sont relatives à la question, pour la question *pourquoi*.

Quand on répond aux questions « Que », « Où », « Qui », « Quand » et « Quel » dans l'enquête interrogative, le but de l'enquête est le desideratum de la question principale. C'est-à-dire que le but de répondre la question principale est que nous établissons son desideratum. Quand les questions pourquoi sont répondues dans l'enquête interrogative, le desideratum est déjà connu au début de l'enquête. Le but de l'enquête est que nous établissons le pont entre les prémisses initiales et la conclusion ultime. Le théorème de la loi de couverture montre que ce que nous établissons le pont est que nous trouvons la formule $H[x]$ et la condition initiale $H[b]$. Donc, ce que nous trouvons la condition initiale $H[b]$ est ce qui est visé en répondant à la question pourquoi. Donc, la condition initiale $H[b]$ est appelée la réponse à la question *pourquoi*.

Il est très important de réaliser la différence de sens du mot « réponse ». Quand nous utilisons le mot « réponse » avec la question *pourquoi*, le sens de « réponse » est différent de celui des autres questions « Que », « Où », « Qui », « Quand » et « Quel ».. Pragmatiquement les sens de « réponse » sont identiques. Mais sémantiquement et logiquement, ce sont vraiment des notions différentes.

Si nous ne considérions pas que la condition initiale $H[b]$ est la réponse pour la question *pourquoi*, nous pourrions considérer que la loi de couverture $(\forall x)(H[x] \rightarrow C(x))$ est (une partie d') une réponse. Dans les deux cas, la « réponse » peut être utilisée comme les prémisses de l'enquête supérieure. C'est le cas des autres questions.

La loi de couverture nous donne une sorte de vue d'ensemble abrégée de l'enquête interrogative entière avec le desideratum d'une question *pourquoi* comme conclusion ultime. Dans la preuve du théorème de la loi de couverture, la loi de couverture H est obtenue essentiellement comme la formule de l'interpolation qui correspond à la preuve de $C[b]$ de T avec les réponses de l'oracle. Cette formule de l'interpolation peut être considérée comme une sorte de vue d'ensemble de la preuve. C'est un résultat remarquable. Par ce résultat, puisque $H[b]$ est obtenu comme une formule de l'interpolation, *la structure de la formule* $H[x]$ *renvoie l'image de la structure de l'argument interrogatif.* La raison ultime de ce résultat est que les questions *pourquoi* peuvent opérer comme les questions principales de l'enquête entière.

5.5. Le choix de l'élément questionné

Nous pouvons traiter l'individu donné *b* dans l'explanandum (c'est-à-dire, dans la conclusion ultime de l'enquête interrogative). Mais nous, en tant que personne qui interroge, pouvons traiter un autre individu, ou d'autres individus, comme $b_1, b_2, ...$ Dans ce cas-là, l'explanandum peut être exprimée comme $C[b_1, b_2, ...]$. Si aucune constante $b_1, b_2, ...$ n'a d'occurrence dans *T*, avec le théorème de la loi de couverture, « la condition initiale » établit l'existence de :

$H[b_1, b_2, ...]$

Et la loi de couverture :

$(\forall x_1)(\forall x_2)(H[x_1, x_2, ...] \rightarrow C[x_1, x_2, ...])$

elle a les mêmes propriétés comme la loi de couverture ci-dessus..

Le choix de *b* (ou $b_1, b_2, ...$) égale le choix de l'élément de l'explanandum qui est nécessaire pour l'explication. Le choix est pragmatique. Il crée une différence dans la condition $H[b_1, b_2, ...]$ de la loi de couverture. Cela veut dire que les questions pourquoi peuvent se concentrer sur quelconque individu particulier. Par exemple une question comme ;

(5.6.1) Pourquoi John va à New York mardi ?

peut être prise dans divers sens différents. Cela dépend de quel élément de (2.6.1) est souligné. Par exemple :

(5.6.2) Pourquoi est-ce John qui est allé à New York mardi ?

(5.6.3) Pourquoi est-ce à New York que John est allé mardi ?

(5.6.4) Pourquoi est-ce mardi que John est allé à New York ?

Une petite extension de l'idée (et de la notion) de logique épistémique aide à comprendre ce qui se passe ici. Nous permettons d'appliquer la notation d'indépendance (la barre oblique) pour d'autres sortes d'expressions. Nous l'appliquons aux constantes d'individus. Donc si nous ne mettons pas l'accent sur une constante d'individus, le desideratum de (5.6.1) est :

(5.6.5) $KA(j,n,m)$

Donc, les desiderata de (5.6.2) - (5.6.4) peuvent être représentés ainsi :

(5.6.6) $KA((j/K),n,m)$

(5.6.7) $KA(j,(n/K),m)$

(5.6.8) $KA(j,n,(m/K))$

Ces formules sont aussi écrites comme ce qui suivent :

(5.6.9) $K(\exists x/K)(x = j \wedge A(j,n,m))$

(5.6.10) $K(\exists x/K)(x = n \wedge A(j,n,m))$

(5.6.11) $K(\exists x/K)(x = m \wedge A(j,n,m))$

Cette observation nous donne une liaison entre (5.6.2)-(5.6.4) et les questions « Qui », les questions « Où », et les questions « Quand ». Sûrement, ce que nous répondons à (5.6.2) est que nous établissons, entre autres, la question

« Qui est allé à New York mardi ? ». Dans les questions pourquoi, l'élément questionné n'est pas représenté par les pronom ou adverbe interrogatifs comme « quand », « qui », « que » et « où ». C'est une grande différence entre les questions *pourquoi* et d'autres questions « Que », « Où », « Qui », « Quand » et « Quel ».

L'élément questionné peut aussi être la notion générale. Par exemple, si l'explanandum est $P(b)$. L'élément questionné est plutôt P. Il n'est pas b. Alors, la loi de couverture a la forme :

(5.6.12) $(\forall X)(H[X] \rightarrow X(b))$

5.6. Questions Comment

Si *b* peut avoir une occurrence dans la prémisse initiale du théorème de la loi de couverture, la loi de couverture ne peut pas être obtenue en général. Mais ce cas correspond plutôt aux questions comment qu'aux questions pourquoi. Les réponses aux questions comment (au sens pragmatique de « réponse ») ne sont pas capables d'être résumées par des explanans singulièrs. Mais les réponses des questions comment peuvent signifier une liste de toutes les étapes des conditions initiales, donnée par la conséquence.

Dans les questions comment, contrairement aux questions pourquoi, il n'y a aucun choix des éléments de la question ultime comme l'élément expliqué. Toutes ces choses sont des conséquences de la faillite du théorème de la loi de couverture avec l'hypothèse faible qui nous permet d'avoir une occurrence dans T à b.

Donc, toute question dont le desideratum, logiquement, ne contient pas $/K$, n'est pas une question pourquoi. Toutes enquêtes interrogatives dont la conclusion ultime ne contient pas d'élément questionné, qui essaye de répondre à la question pourquoi, ne sont pas des questions pourquoi. Ce sont plutôt des questions comment que des questions pourquoi. On peut répondre à telle question comment par le même argument interrogatif que celui d'une question *pourquoi*.

La différence entre la question pourquoi et la question comment est la différence de la relation à la conclusion. Spécifiquement, c'est la relation entre l'élément questionné de l'explanandum et la prémisse initiale T. Donc la différence entre deux types de questions n'est pas seulement pragmatique, mais aussi structurel.

Conclusion

Dans le premier chapitre, nous avons présenté la méthode des tableaux de Beth en comparant la méthode de tableaux de Beth et la méthode des séquents de Gentzen. Nous avons vu que la méthode des tableaux est une méthode sémantique pour constater la validité logique de l'inférence. Nous l'avons utilisé systématiquement par trouver le contre-exemple potentiel qui rend la prémisse de l'inférence vraie et sa conclusion fausse.

Dans le deuxième chapitre, nous avons exposé le jeu de Hodges et van Benthem afin de mieux comprendre la version interrogative donnée par Hintikka. Nous avons vu que le jeu de Hodges et van Benthem est le jeu de la construction d'un modèle et que la construction du modèle est faite par deux joueurs, le Constructeur et le Critique, en construisant des tableaux de Beth.

Cette version de Hintikka a fait l'objet de notre troisième chapitre. Nous avons pu utiliser une variante de la méthode des tableaux de Beth pour exprimer l'inférence logique. Donc, nous avons vu que le jeu interrogatif de Hintikka est évidemment une variante du jeu de Hodges et van Benthem. Au cours de celle-ci, nous avons étudié la règle de l'interrogation qui dit que nous pouvons ajouter la réponse dans LA(LES) PRÉMISSE(S) INITIALE(S) comme une prémisse nouvelle.

Ensuite, dans notre quatrième chapitre, nous avons vu une explication sémantique pour plusieurs concepts interrogatifs comme la présupposition, le desideratum et la réponse. Et nous avons vu les règles complètes pour la logique interrogative.

Notre dernier chapitre a porté sur les questions de type *pourquoi*. Nous avons vu que le but de la personne qui interroge lorsqu'elle pose les questions « Que », « Où », « Qui », « Quand » et « Quel » est qu'elle obtient la conclusion ultime, et que, par contre, quand la personne qui interroge pose une question pourquoi, elle cherche le pont argumentatif entre les suppositions (les hypothèses ou les prémisses) initiales et la conclusion ultime. Quand la personne qui interroge pose une question pourquoi, le pont a été la « réponse ». Dans la dernière section, nous avons présenté le théorème de la loi de couverture. Nous avons vu que la condition initiale $H[b]$ est appelée la réponse à la question *pourquoi*. Si nous ne considérions pas que la condition initiale $H[b]$ est la réponse pour la question *pourquoi*, nous pourrions considérer que la loi de couverture $(\forall x)(H[x] \rightarrow C(x))$ est (une partie d') une réponse. Nous avons vu que, dans les deux cas, la « réponse » peut être utilisée comme les prémisses de l'enquête supérieure. Dans ce chapitre nous avons vu que les réponses aux questions *comment* (au sens pragmatique de « réponse ») ne sont pas capables d'être résumées par des explanans singuliers. Mais les réponses des questions *comment* peuvent signifier une liste de toutes les étapes des conditions initiales, donnée par la conséquence.

Nous avons rapidement vu le modèle interrogatif de Hintikka. Mais c'est justement une partie du très grand modèle. Il y a beaucoup de résultats et beaucoup de nouvelles notions issues du modèle.

Mais nous pouvions voir des points importants du modèle. Avec ce que nous avons exposé dans ce mémoire, il n'est pas difficile de développer la théorie de modèle interrogative. Le modèle hintikkanien fait vraiment l'approche déductive (par inférence) pour la logique des questions et des réponses, mais nous avons encore beaucoup de problèmes sur les conditions de validité pour divers types des inférences interrogatives. Mais, en ce moment-là, le modèle est le plus probant.

Comme nous l'avons dit, la théorie de Wiśniewski est vraiment attirante. Les explications sont intéressantes et simples. Et il nous semble qu'elles capturent bien les idées fondamentales sur les inférences interrogatives. Mais, si nous considérons son applicabilité pour résoudre les problèmes dans un cas actuel, nous trouvons un défaut dans la théorie.

Donc ce que nous devons faire pour le modèle hintikkanien est de capturer le modèle de façon à ce que nous ne perdions pas toute son idée fondamentale sur la logique interrogative.

Référence

[1]Andrzej WINŚNIEWSKI, Vasilyi SHANGIN. *Scoratic proofs for quantifiers.* Journal of Philosophical Logic, Vol.35, 2006. p.147-178.

[2]Andrzej WINŚNIEWSKI. *Erotetic implications.* Journal of Philosophical Logic, Vol.23, 1994. p.173-195.

[3]Andrzej WINŚNIEWSKI. *Scoratic proof.* Journal of Philosophical Logic, Vol.33, 2004. p.299-326.

[4]Andrzej WINŚNIEWSKI. *The logic of questions as a theory of erotetic arguments.* Synthese. Vol.109, 1996. p.1-25.

[5]Andrzej WINŚNIEWSKI. *The Posing of Questions. Logical Foundations of Erotetic Inferences.* Kluwer, Dordrecht, 1995.

[6]Elliot MENDELSON. *Introduction to mathematical logic*. Van Nostrand, 1964.

[7]Evert Willem BETH. *Semantic Entailment and Formal Derivability*, Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Adeling Letterkunde, N.R. Vol. 18, No. 13, Amsterdam, 1955, p. 309-42.

[8]Hajnal ANDRÉKA, Johan van BENTHEM, István NÉMETI, *Modal Logics and Bounded Fragments of Predicate Logic*, Journal of Philosophical Logic, Vol. 27, No. 3, 1998, p. 217–274.

[9]Herbert B. ENDERTON. *A mathematical introduction to logic 2nd ed.*. Academic Press, 2001.

[10]Jaakko HINTIKKA, Gabriel SANDU. *Game-theoritical semantics*, dans J. van Benthem et A. ter Meulen (ed.), Handbook of Logic and Language, Elsevier, Amsterdam, 1997.

[11]Jaakko HINTIKKA, Halonen ILPO. *Semantics and Pragmatics for Why-Questions*, Journal of Philosophy, Vol. 92, No. 1, 1995, p.636-657.

[12]Jaakko HINTIKKA. (ed), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, 1969.

[13]Jaakko HINTIKKA. *A Spectrum of Logics of Questionning*, Philosophica, Vol. 35, p.135-150, 1985.

[14]Jaakko HINTIKKA. *Inquiry as Inquiry: A Logic of Scientific Discovery.* Kluwer, Dordrecht, 1999.

[15]Jaakko HINTIKKA. *On the logic of an interrogative model of scientific inquiry*. Synthese. Vol.47, 1981. p.69-83.

[16]Jaakko HINTIKKA. *The interrogative approach to inquiry and probabilistic inference*, Erkenntnis, Vol. 26, 1987, p.429–442.

[17]Jaakko HINTIKKA. *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge Univ. Press, 1996.

[18]Jaakko HINTIKKA. *The Role of Logic in Argumentation*, The Monist, Vol. 72, No. 1 p.3-24, 1989.

[19]Jaakko HINTIKKA. *What is the logic of experimental inquiry*,Synthese, Vol. 74, 1988, p.173–190.

[20]Jaakko HINTIKKA. *What Was Aristotle Doing in His Early Logic, Anyway? a Reply to Woods and Hansen*. Synthese. Vol.113, 1997. p.241-249.

[21]Johan van BENTHEM, *Logical Construction Games*, Acta Philosophica Fennica, Vol.78, Helsinki, 2006, p.123-137.

[22]Johan van BENTHEM, *The epistemic logic behind IF games*, dans L. Hahn (ed.), Jaakko Hintikka, Library of Living Philosophers, Open Court, 2005.

[23]Joseph R. SHOENFIELD. *Mathematical logic*. Addison-Wesley, 1967.

[24]Lennart AQVIST. *New Approach to the logical theory of interrogatives(Part I).* University of Uppsala, 1965.

[25]Nuel D. BELNAP, Jr., Thomas B. STEEL. *The logic of questions and answers*. Yale University Press, 1976.

[26]Raymond M. SMULLYAN. *First-order logic*. Dover publ., 1995.

[27]Shahid RAHMAN, Cédric DÉGREMONT, *The Beetle in the Box: Exploring IF-Dialogues*, Acta Philosophica Fennica, Vol.78, Helsinki, 2006, p.91-122.

[28]Stephen HARRIS. *GTS and Interrogative Tableaux*, Synthese, Vol. 99, No.3, 1994, p. 329-343.

[29]Sylvain BROMBERGER. *WHY-QUESTIONS*. University of Pittsburgh Press, 1966.

[30]Theo A. F. KUIPERS, Andrzej WINŚNIEWSKI. *An erotetic approach to explanation by specification*. Erkenntinis, Vol.40, 1994. p.377-402.

[31]Wilfred HODGES, *Building Models by Games*, Cambridge University Press, 1985.

[32]Wilfred HODGES, *Elementary Predicate Logic*, dans D. Gabbay & F. Guenthner (ed.), Handbook of Philosophical Logic, Vol. I, deuxième edition, Kluwer, Dordrecht, 2001, p.1–129.

[33]Willard Von Orman QUINE. *Methods of logic*. Harvard University Press, 1982.

[34]William CRAIG. *Linear Reasoning : A New Form of the Herbrand-Gentzen Theorem*, Journal of Symbolic Logic, Vol. 22, 1957, p.250-268.

[35]William CRAIG. *Three Uses of the Herbrand-Gentzen Theorem in Relating Model Theory and Proof Theory*, Journal of Symbolic Logic, Vol. 22, 1957, p.269-285.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION .... - 2 -

1. LA METHODE DES TABLEAUX DE BETH.. - 6 -

1.1. LES TABLEAUX...- 6 -

1.2. LA CARACTERISATION FORMELLE DES TABLEAUX ....- 11 -

2. LES TABLEAUX DE BETH ET LES RESULTAT DES JEUX DE HODGES ET VAN BENTHEM .... - 13 -

2.1. LE JEU DE LA CONSTRUCTION DES TABLEAUX ....- 13 -

2.2 LA THEORIE DES TABLEAUX ET LA THEORIE DES JEUX ....- 17 -

3. LES JEUX INTERROGATIFS DE HINTIKKA .... - 20 -

4. LA LOGIQUE DES QUESTIONS ET DES REPONSES .... - 24 -

4.1. LES REGLES FONDAMENTALES DE LA LOGIQUE INTERROGATIVE ....- 25 -

4.2. LES REGLES POUR L'INTERROGATION..- 31 -

4.3. LES NOTIONS DE QUESTIONS ET DE REPONSES..- 33 -

4.4. INDEPENDANCE INFORMATIQUE DE LA LETTRE INITIALE DE L'ENONCE, K. . - 36 -

4.5. LA LOGIQUE EPISTEMIQUE POUR LES QUESTIONS ET LES REPONSES..........- 38 -

4.6. LA POSSIBILITE DE FORMULER UN ENSEMBLE DE REGLES POUR LA LOGIQUE INTERROGATIVE EPISTEMIQUE ....- 40 -

4.7. LES REGLES EPISTEMIQUE POUR LA LOGIQUE INTERROGATIVE ....- 42 -

5. QUESTION *POURQUOI* .... - 44 -

5.1. La question la plus pertinente directement pour la question pourquoi .... - 45 -

5.2. $k = 1$ pour la theorie de la question pourquoi .... - 46 -

5.3. La question principale et operationnelle .... - 47 -

5.4. Le theoreme de la loi de couverture .... - 52 -

5.5. Le choix de l'element questionne... - 58 -

5.6. Questions Comment.. - 60 -

CONCLUSION .... - 61 -

RÉFÉRENCE .... - 64 -